Über die anomale elektrische dispersion von flüssigkeiten

Paul Drude


ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
CIRCUMSPICE
PHYSICS
LIBRARY
THE GIFT OF
MRS. JOHN OREN REED



ÜBER DIE

ANOMALE ELEKTRISCHE DISPERSION

VON

FLÜSSIGKEITEN

VON

P. DRUDE.

Des XXIII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe
der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

Nº I.

MIT EINER TAFEL UND ZWEI TEXTFIGUREN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL

1896.

Das Manuscript eingeliefert am 20. Januar 1896.
Der Abdruck vollendet am 5. Februar 1896.

ÜBER DIE

ANOMALE ELEKTRISCHE DISPERSION

VON

FLÜSSIGKEITEN

VON

P. DRUDE,

AUSSERORDENTLICHEM MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

MIT EINER TAFEL UND ZWEI TEXTFIGUREN.

Bei der Beschreibung einer Untersuchungsmethode für den elektrischen Brechungsexponenten von Flüssigkeiten[1]) hatte ich das auffällige Resultat erwähnt, dass kurze elektrische Wellen (von 70 cm Wellenlänge in Luft) in Alkohol und besonders in Glycerin in viel stärkerem Grade gedämpft werden, als in Wasser, oder in wässrigen Salzlösungen. Dies muss deshalb auffällig erscheinen, weil die Dämpfung elektrischer Wellen in einer Substanz von deren elektrischer Leitfähigkeit abhängen muss in der Weise, dass erstere mit der letzteren zunehmen muss. Nun ist aber die Leitfähigkeit von Glycerin oder Alkohol bei weitem geringer, als die von Wasser oder gar wässrigen Salzlösungen. Trotzdem kann man aber mit Hülfe der damals beschriebenen Methode sehr leicht constatiren, dass Glycerin jene kurzen elektrischen Wellen zweifellos stärker dämpft, als eine etwa 0,8procentige Kupfersulfat-Lösung, deren Leitfähigkeit bei 18° Celsius bezogen auf Quecksilber als Einheit $4700 \,.\, 10^{-10}$ ist, während das von mir benutzte Glycerin, wenn es nach der Kohlrausch'schen Methode mit Hülfe eines Inductionsapparates untersucht wird, bei 18° die Leitfähigkeit $2{,}84 \,.\, 10^{-10}$ besitzt. Ich habe jetzt durch die im Folgenden zu beschreibenden Versuche ermittelt, dass eine etwa 5procentige Kupfersulfat-Lösung, deren Leitfähigkeit $17000 \,.\, 10^{-10}$ ist, elektrische Wellen der in Luft gemessenen Wellenlänge von 74 cm ebenso stark dämpft, wie Glycerin, nämlich in dem Maasse, dass die Welle sich auf der Strecke von $\frac{1}{2}$ Wellenlängen todt läuft. Die Leitfähigkeiten beider Flüssigkeiten verhalten sich wie 6000 zu 1.

Es kann also vorkommen, dass Substanzen, welche für langsame elektrische Wechselfelder, wie sie z. B. Inductionsapparate erzeugen, im Verhältniss 6000 zu 1 verschieden isoliren, für sehr schnelle elektrische Wechselfelder gleich schlecht isoliren.

---

1) P. Drude, Ber. d. k. sächs. Ges. d. W., math. phys. Cl., 1895, p. 329. — Wied. Ann. 55, 1895, p. 633.

Durch Ausdehnung der Untersuchung auf mehrere Flüssigkeiten habe ich constatirt, dass derartige Auffälligkeiten bei denjenigen Substanzen hohen Molekulargewichtes anzutreffen sind, deren Dielektricitätsconstante stark vom Quadrat des optischen Brechungsexponenten abweicht, welche also nach der Dispersionstheorie Eigenschwingungen besitzen, die langsamer als die des Lichtes sind. Es zeigt sich allemal in diesen Fällen eine zum Theil sehr starke anomale Dispersion und Absorption, d. h. der elektrische Brechungsexponent nimmt mit zunehmender Schwingungszahl ab, die Absorption zu.

Das Molekulargewicht hat jedenfalls einen bedeutenden Einfluss auf die Erscheinung. In der Reihe der Alkohole wird die anomale Absorption und Dispersion für bestimmte Schwingungsgebiete in sehr hohem Grade intensiver, je höher das Molekulargewicht ist, d. h. je complicirter das Molekül gebaut ist. Complicirtere Moleküle der Alkohole besitzen demnach langsamere Eigenschwingungen, als einfachere, und diese mit der chemischen Constitution in so einleuchtendem Zusammenhange stehende Thatsache wird sich vermuthlich auch für andere homologe Reihen bestätigen, welche überhaupt sehr langsame Eigenschwingungen besitzen.

Auch will ich gleich im Voraus bemerken, dass ich für Wasser, in Übereinstimmung mit anderen Beobachtern, keine Dispersion und Absorption habe nachweisen können. Nach den Resultaten, welche ich bei anderen Flüssigkeiten erhalten habe, muss ich vermuthen, dass das niedrige Molekulargewicht des Wassers, d. h. die Kleinheit des Moleküls, die Eigenschwingungen in Gebiete rückt, in deren Nähe man mit den bisherigen experimentellen Hülfsmitteln nicht gelangen konnte. So ist wohl durch die, ich möchte sagen zufällige Kleinheit des Wassermoleküls eine Erscheinung bei den jetzt so zahlreich angestellten Beobachtungen mit elektrischen Wellen entgangen, die für andere Flüssigkeiten ganz evident zu Tage tritt.

Besonders merkwürdig muss es ja erscheinen, dass die Schwingungszahlen von verhältnissmässig noch trägen elektrischen Wellen schon mit den langsamsten Eigenschwingungen von Flüssigkeiten selbst sehr hohen Molekulargewichtes vergleichbar oder gar benachbart werden. Aus diesem Grunde bin ich anfangs sehr skeptisch bei der Deutung dieser Erscheinungen verfahren, als ich

zunächst beim Glycerin und Alkohol starke Absorption bemerkte und für Glycerin nur eine halb so grosse Dielektricitätsconstante erhielt, als sie Thwing[1]) für langsamere Schwingungen gewonnen hat. Ich liess zunächst[2]) die Ursache hierfür offen zwischen den beiden Möglichkeiten, dass jene Flüssigkeiten in der Nähe der von mir benutzten Schwingungen auswählende Absorption besässen, oder dass das Glycerin stark verunreinigt wäre.

Später[3]) habe ich, weil mir auswählende Absorption und anomale Dispersion für die benutzten elektrischen Wellen zu unwahrscheinlich schien, vermuthet, dass ein mangelnder metallischer Contact eines Drahtbügels, welcher die Drähte *DD* überbrückt, längs denen sich die elektrischen Wellen fortpflanzen, Ursache der Dämpfung der Wellen sein könnte. Bei dem zähflüssigen Glycerin drängt sich leicht diese Vorstellung auf. Indess kann ich nicht leugnen, dass schon damals das Verhalten des Alkohols mir sehr wenig dadurch erklärt schien, da in ihm der Bügelcontact doch sicherlich nicht schlechter ist, als im Wasser, welches auf die Wellen keine merkliche Dämpfung ausübt.

Ausserdem kommt es beim Zustandekommen stehender elektrischer Wellen in den Drähten *DD* auf eine wirkliche metallische Berührung des Bügels nicht an, wenn nur durch ihn eine grosse Capacität an die Drähte *DD* angelegt wird. Diesen Schluss ergiebt sowohl die Theorie, als auch das Experiment. Ich habe mich davon überzeugt, dass durch Verschiebung einer fein lackirten Metallscheibe von 5 cm Durchmesser auf den Drähten *DD* in ihnen ebenso intensive stehende elektrische Wellen abgegrenzt werden können, als durch einen übergelegten Metallbügel, nur liegen die Ueberbrückungsstellen, für welche eine über die Drähte *DD* gelegte Vacuumröhre maximales Leuchten aufweist, bei Benutzung der Scheibe und des Bügels verschieden (weil der metallische Contakt einer unendlich grossen Capacität entspricht, die lackirte Scheibe einer endlichen Capacität[4]).

Dass ferner die Dämpfung elektrischer Wellen in den Flüssig-

1) Ch. B. Thwing, Ztschf. f. phys. Chem. 1894, 14, p. 286.

2) P. Drude, Ber. d. k. sächs. Ges. d. W. l. c. p. 342, Anm. 3. — p. 348, Anm. 1.

3) Beim Abdruck des Gesellschaft-Berichtes in Wied. Ann. 55, 1895, p. 646, Anm. 3, — p. 652, Anm. 1.

4) Man kann dieselbe genau berechnen, wenn man die Differenz der Überbrückungsstellen des Bügels und der Scheibe misst.

keiten eine mit ihrer Natur verbundene Erscheinung und nicht eine durch secundäre Umstände, z. B. den Bügelcontact, hervorgerufene ist, erkennt man daraus, dass beim Weiterschieben des Bügels über mehrere, etwa nur zwei halbe Wellenlängen heraus bei demselben Erreger der elektrischen Wellen und denselben Drähten *DD* die Intensität derselben, je nach Natur der Flüssigkeit, in verschiedenem Grade immer mehr und zum Theil sehr stark abnimmt, je weiter der Bügel in die Flüssigkeit hinein geschoben wird. Wenn der Bügel an sich einen schwächenden Einfluss auf die Intensität der an ihm reflectirten Wellen ausübte, so müsste derselbe sich immer gleich bleiben, unabhängig davon, ob der Bügel eine oder mehrere halbe Wellenlängen in der Flüssigkeit abgrenzt.

Wegen der zeitlichen Dämpfung der vom Erreger ausgesandten Wellen müssten zwar auch die stehenden Wellen allmählich an Deutlichkeit verlieren, wenn der Bügel über mehrere halbe Wellenlängen hinaus verschoben wird. Dass aber diese zeitliche Dämpfung bei dem von mir benutzten Erreger sehr gering war, ist daraus zu schliessen, dass der Bügel, falls die Drähte *DD* in Luft oder Wasser liegen, über zahlreiche halbe Wellenlängen hinaus verschoben werden konnte, ohne dass die deutliche Bildung stehender Wellen aufhörte.

Schliesslich habe ich mich beim Glycerin davon überzeugt, dass die Dämpfung der Wellen in ihm ebenso stark war, wenn nicht ein beweglicher Bügel die Drähte *DD* überbrückte, sondern wenn dieselben ein einziges zusammenhängendes Drahtstück von zu variirender Länge bildeten. Die Anordnung ist unten bei der Mittheilung der Resultate für Glycerin näher beschrieben.

Es ist also ausgeschlossen, dass die hier angewandte Messungsmethode durch zufällige störende Nebenumstände falsche Resultate liefert; im Gegentheil stimmen dieselben bei normal sich verhaltenden Flüssigkeiten mit grosser Genauigkeit mit den Resultaten, welche andere Forscher nach anderen Methoden erhalten haben, überein, und überhaupt erweist sich die Präcision der Methode als so gross, wie ich sie ursprünglich nicht für möglich gehalten hatte[1]). Ich werde die Präcision bei Besprechung der einzelnen Resultate angeben.

---

1) Bei der ersten Mittheilung (Ber. d. k. sächs. Ges. d. W. l. c. p. 361, Wied. Ann. l. c. p. 655) habe ich angegeben, dass die Methode die Dielektricitätsconstante

Beschreibung des Apparates.

Hinsichtlich der Details verweise ich auf die frühere Mittheilung. Ich will hier nur das Wesentliche wiederholen (vgl. die skizzirte Figur 1).

Es sind zwei verschiedene Erreger der elektrischen Wellen und dem entsprechend zwei verschiedene Schwingungsdauern zur Untersuchung angewandt worden. Die Schwingungsdauern verhalten sich etwa wie 1 : 3. Der kleinere Erreger besteht aus zwei halbkreisförmig gebogenen, 3 mm dicken, Drähten *EE*, welche zusammen einen Kreis von 5 cm Durchmesser bilden. An ihrem einen Ende tragen sie

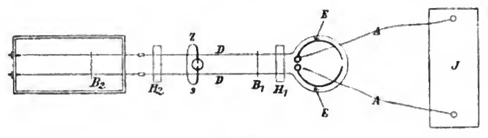


Fig. 1.

zwei Messingkugeln von 5 mm Durchmesser, zwischen denen ein Funkenspiel durch Zuleitung von einem Rhumkorff'schen Inductionsapparate *J* zu Stande gebracht wird. Von diesen Zuleitungsdrähten *AA* liegt der eine metallisch an der einen Entladungskugel, während der andere eine kleine Funkenstrecke[1]) mit der anderen Entladungskugel bildet. Beide Funkenstrecken (letztere und die zwischen den Messingkugeln) sind mikrometrisch verstellbar. Man kann leicht diejenigen Längen der Funkenstrecken ausprobiren, für welche die Intensität und Regelmässigkeit der elektrischen Wellen möglichst gross ist. Bei dem Überschlagen der Funken in Petroleum beträgt die

mit einer Genauigkeit von 2% zu bestimmen erlaube. Ich habe mich jetzt davon überzeugt, dass sie für Substanzen, die keine starke auswählende Absorption für die benutzten Wellen besitzen, wesentlich höher, oft bis auf $\frac{1}{2}$%, getrieben werden kann, cf. unten.

1) Diese zweite Funkenstrecke, die ich bei der früheren Anwendung des Apparates (cf. die frühere Mittheilung) nicht anwandte, steigert die Intensität der Wellen ganz ausserordentlich. — Eine dritte Funkenstrecke (zwischen Zuleitung und anderer Entladungskugel) erweist keinen besonderen Vortheil.

wirksamste Länge unter ½ mm. Der Rhumkorff'sche Apparat besitzt einen schnell schwingenden Deprez'schen Unterbrecher[1]). — Der grössere Erreger besteht aus zwei längeren, halbkreisförmigen Kupferdrähten, welche zusammen einen Kreis von 15 cm Durchmesser bilden. Im Übrigen ist der Apparat für diese längeren, wie für jene kürzeren Wellen ganz gleich construirt.

Der Erreger ist nahe (auf 1 mm Distanz) umgeben von einem 1 mm dicken, kreisförmig gebogenen Kupferdraht (Empfänger), der in die beiden Paralleldrähte *DD* ausläuft, deren Axen 1,8 cm Distanz besitzen. Die Parallelität und Unveränderlichkeit wird durch Einklemmen und Straffspannen durch Ebonithalter H_1, H_2 an zwei Stellen gesichert. In etwa 10 cm Distanz von den Messingkugeln des Erregers ist eine Brücke B_1, bestehend aus 1 mm dickem Kupferdraht, oder 1 mm breiten Kupferblechstreifen, über die Drähte *DD* gelegt. Diese Brücke ist je nach Umständen, die unten näher mitgetheilt werden, ein gerades, 2 cm langes, oder ein gebogenes längeres Metallstück. B_1 kann in der Mitte zwischen den Drähten zur Erde abgeleitet werden, diese Ableitung kann aber auch als unwesentlich fortgelassen werden.

Jenseit B_1 kann eine zweite Brücke B_2 über den Drähten *DD* verschoben werden. Bei bestimmten Lagen (Knoten der elektrischen Kraft) von B_2 bilden sich intensive stehende elektrische Wellen zwischen B_1 und B_2, deren Existenz an dem Aufleuchten einer zwischen die Drähte *DD* gebrachten Zehnder'schen Vacuumröhre *Z* erkannt wird. Die Glimmelektroden dieser Zehnder'schen Röhre sind durch einen 14,5 bezw. 70 cm langen Kupferdraht *s* verbunden. Dadurch besitzt die Röhre eine Eigenschwingung, welche in Resonanz steht mit den Schwingungen, welche der kleinere, bezw. grössere Erreger in dem Drahtsystem vor B_1 erzeugt. Für die kurzen Wellen (kleinen Erreger) wurde die Zehnder'sche Röhre in der auf die elektrische Kraft reagirenden Lage (vgl. die frühere Mittheilung, Ber. der sächs. Akad. p. 343 — Wied. Ann. p. 647) als Resonator angewandt,

1) Denselben habe ich von KEISER & SCHMIDT in Berlin bezogen. Mit seiner Hülfe werden die Wellen viel deutlicher beobachtbar, als bei Benutzung langsam schwingender Unterbrecher mit Platincontact. — Ich habe auch versucht, den primären Stromkreis des Rhumkorff mit einer Wechselstrommaschine zu speisen, habe aber dann keine Entladungsfunken in Petroleum erzielen können.

d. h. eine Viertel Wellenlänge der (in Luft gemessenen) elektrischen Schwingungen hinter B_1 (wie Figur 1 andeutet), — für die längeren Wellen (grossen Erreger) wurde sie als Resonator für die magnetische Kraft benutzt (weil die Gestaltung der Resonatorleitung jene andere Lage verbot) und dem entsprechend lag ihre Drahtleitung dann dicht hinter B_1. Die Abstimmung auf Resonanz geschieht dadurch, dass einmal der erweiterte Theil der Zehnder'schen Röhre über *DD* gelegt wird (welcher keine Eigenschwingungen besitzt), und die halbe Wellenlänge der jenseits B_1 erzeugten Schwingungen durch Verschiebung des Bügels B_2 abgegriffen wird, und andererseits die Zehnder'sche Röhre in den bezeichneten Lagen als Resonator benutzt wird, und wieder die Wellenlänge durch Fortschieben des Bügels B_2 bestimmt wird. Letztere muss, wenn der die Glimmelektroden der Zehnder'schen Röhre verbindende Kupferdraht *s* die richtige Länge hat, übereinstimmen mit den zuerst gemessenen Wellenlängen; wenn das nicht der Fall ist, so muss die Länge des Kupferdrahtes *s* etwas geändert werden. Es beeinträchtigt übrigens die Wirkungen nicht merklich, wenn zwischen beiden halben Wellenlängen eine Differenz von etwa 2 % besteht. — Die Eigenschwingung der Zehnder'schen Röhre kann man auch dadurch ermitteln, dass man B_1 fortnimmt und nur B_2 verschiebt. Es bilden sich allerdings nicht so scharf ausgebildete Maxima und Minima des Leuchtens bei Verschieben von B_2. Die so bestimmten Lagen von B_2 hängen nur von der Eigenschwingungsdauer der Zehnder'schen Röhre ab, da ohne Bügel B_1 der Erreger keine Wellen von scharf ausgeprägter Periode entsendet[1]).

Erreger und Empfänger sind in Petroleum (Kaiseröl) eingetaucht, die Drähte *DD* dagegen verlaufen zwischen beiden Ebonithaltern H_1, H_2 in Luft. Diese Halter sind fest auf die Tischplatte aufgeschraubt und zwar H_2 nahe am Tischrande in der Weise, dass die erste Hauptlage von B_2, für welche die Zehnder'sche Röhre maximales Leuchten aufweist (erster Knoten der elektrischen Kraft), jenseit H_2 liegt und etwa 8 cm über den Tischrand herausfällt.

1) Es sind nämlich für die Periode derselben nicht nur die Dimensionen des Erregers massgebend, sondern auch die geometrischen Verhältnisse des ihn unmittelbar umgebenden Empfängers, cf. die frühere Mittheilung Ber. d. k. sächs. Ges. d. W. p. 333, Wied. Ann. p. 636.

4 cm hinter H_2 tragen die Drähte DD sehr kleine, 5 mm lange, 3 mm dicke Klemmschrauben, vermittelst deren man nach Belieben entweder eine 2 m lange Luftleitung, die aus straff und genau parallel gespannten 1 mm dicken Kupferdrähten besteht, anlegen kann, oder eine Drahtleitung, welche einen Trog aus glasirtem Thon durchsetzt, in welchen die zu untersuchenden Flüssigkeiten gegossen werden (in Figur 1 ist letztere Anordnung gezeichnet).

Die Luftleitung liegt 1 m über dem Erdboden, nur an ihrem Ende wird sie von einem, auf einem Stelltisch aufgeschraubten Halter getragen und gespannt. Die Wellen können daher hinter den Klemmschrauben der Drähte DD vollkommen ungestört (wie im unendlichen Luftraume) verlaufen, und man erhält durch Messung der Knotenlagen von B_2 die wahre Wellenlänge der elektrischen Schwingung in Luft. — Übrigens habe ich mich davon überzeugt, dass nur die unmittelbare Nähe (1 cm) von Holz- oder Metallmassen die Knotenlagen von B_2 stört.

Der Thontrog hat 31 cm Länge, 12 cm Höhe, 10 cm Breite im Lichten[1]). Die Wandstärke beträgt 1,1 cm. Die Schmalseiten besitzen je zwei Löcher, welche den Eintritt einer 1 mm dicken Drahtleitung in den Trog ermöglichen. Diese ist durch Korkstopfen in den Löchern auf 1,8 cm Axenabstand festgeklemmt, und wird dadurch straff gespannt, dass an den Vorderenden je ein kleines, 2 mm Durchmesser haltendes Kupferscheibchen festgelöthet ist, welches das Durchziehen durch die Korke der Vorderwand des Troges verhindert, während die Hinterenden an kurze, dickere Messingdrähte angelöthet sind, die die Korke der Hinterwand durchsetzen und Gewinde und Schraubenmutter besitzen. Die Korke der Vorderwand schneiden genau mit der Innenfläche des Troges ab. Die Drahtleitung reicht über die Vorderwand in derartiger Länge (etwa 4 cm) heraus, dass beim Ansetzen dieser Drahtleitung an die Klemmschrauben der Drähte DD an der Innenfläche der Vorderwand des Troges, d. h. beim Anfang der Flüssigkeit, bei geeigneter Lage des Bügels B_1 genau der

1) Wie unten, bei Besprechung der Fehlerquelle 1 angegeben ist, brauchten die Querdimensionen des Troges nur 3 cm bei 1 cm Drahtabstand zu betragen, ohne Fehler herbeizuführen. Man kann also auch mit dem zehnten Theil der Substanzmengen arbeiten.

erste wahre Knoten (vgl. weiter unten) des Wellenzuges hinter B_1 liegt.

Als Bügel B_2 ist stets ein gerader, 2 cm langer Kupferdraht gewählt. Er trägt in der Mitte an einem Seidenfaden oder feinem versilberten Kupferdraht eine 12 mm grosse Bleikugel, welche ihm durch seine Schwere guten Contact mit der Drahtleitung sichert. Für die Luftleitung ist der Bügel mit der Hand verschoben, da eine Einstellungsgenauigkeit von 1 mm bei 37 cm Knotenabstand (halber Wellenlänge) vollkommen genügt, für die Leitung des Troges ist eine besondere Einrichtung zur Bügeleinstellung construirt, da bei der

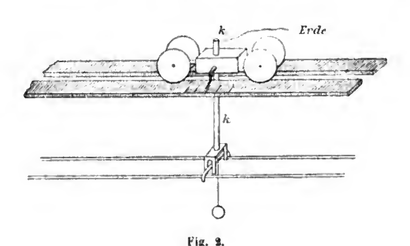


Fig. 2.

kurzen Wellenlänge in einigen Flüssigkeiten (4 cm Knotenabstand im Wasser) der Bügel B_2 eine genaue Parallelführung besitzen muss, und seine Lagen auf $\frac{1}{10}$ mm abgelesen werden müssen. Der Bügel B_2 passt nämlich knapp in eine, an einem dicken Kupferdraht k (vgl. Figur 2) befestigte Messinggabel, welche dem Bügel B_2 nur noch verticale Bewegungen gestattet. Der Kupferdraht k ist mit einem kleinen Wagen befestigt, der auf zwei Metallschienen rollen kann, welche auf der Oberseite des Thontroges befestigt sind. Die eine der Metallschienen ist in mm getheilt. Der Kupferdraht k wird zur Erde abgeleitet.

Untersuchungsmethode.

1. Methode der Leuchtwirkungen.

Die gegenseitigen Abstände der Knoten der elektrischen Kraft in den Drähten DD können durch Ermittelung der Stellungen des Bügels B_2 erhalten werden, für welche die Vacuumröhre Z maximales Leuchten aufweist. Bequemer und genauer kann man die Punkte längs DD mit B_2 aufsuchen, an welchen das Leuchten von Z gerade eingesetzt, da dieses mit grosser Präcision geschieht. Indess fallen die Mittelwerthe zweier solcher benachbarten Einsatzlagen von B_2 nur dann mit den Knotenlagen (für maximales Leuchten) zusammen, wenn die Distanz der Einsetzlagen nicht sehr gross ist. Beträgt diese Distanz mehrere, etwa 8 cm, so hat das Mittel der Einsetzlagen einen etwas kleineren Abstand von B_1, als die Knotenlagen, und zwar um so mehr, je näher diese Knotenlagen nach B_1 zu liegen. Diese Abweichungen sind allerdings nur sehr gering, aber sie sind zu berücksichtigen, wenn man die Wellenlänge in Luft auf $\frac{1}{4}$% bestimmen will, was durchaus möglich ist. Der Grund dieser Erscheinung liegt in der, allerdings verhältnissmässig geringen zeitlichen Dämpfung der vom Erreger entsandten Wellen, man kann diese Dämpfung aus Messung jener Differenzen ermitteln[1]). Deshalb wurden zur Ermittelung der Knotenlagen diejenigen Stellungen des Bügels B_2 aufgesucht, für welche das Leuchten der Röhre Z von mässiger Stärke in grosse Intensität übergeht (Übergangspunkte). Diese Stellungen liegen nur wenige Centimeter (etwa 2 cm bei 37 cm halber Wellenlänge in Luft) auseinander und ihr Mittel fällt genau zusammen mit den Knotenlagen von B_2. Sie lassen sich experimentell sehr bequem und scharf ermitteln.

Wenn die Wellen sehr kurz werden, wie es in manchen Flüssigkeiten (z. B. Wasser, 4 cm Knotenabstand) der Fall ist, so kann man auch die relative Lage der Bäuche der elektrischen Kraft zu den Knoten erhalten als Mittel der zwei Lagen des Bügels B_2, für welche das Leuchten der Röhre von Z grade einsetzt, da diese dann sehr

1) Dies soll in späteren theoretischen Betrachtungen geschehen.

nahe bei einander liegen, bezw. (bei starker Dämpfung in den Flüssigkeiten) für welche das Leuchten von Z von geringer Intensität zu grösserer Stärke übergeht. Das Mittel dieser Lagen fällt dann zusammen mit denjenigen Bügelstellungen, für welche die Röhre Z, wenn sie überhaupt leuchtet, minimale Lichtentwickelung zeigt.

Die Beobachtung geschah nun in der Weise, dass zunächst an der Luftleitung die Knotenabstände vermittelst B_2 aufgesucht wurden. Sodann wurde die Luftleitung aus den Klemmschrauben der Drähte DD gelöst und, ohne etwas an der Stellung des Bügels B_1, des Erregers EE, oder der Zehnder'schen Röhre Z zu ändern, mit der den Thonkasten durchsetzenden Leitung ausgewechselt. In dem mit Flüssigkeit gefüllten Thonkasten wurden die Knoten bezw. Bäuche durch Verschieben des Bügels B_2 symmetrisch hinsichtlich der Zeit durch Hin- und Rückgang ermittelt und beständig die Temperatur der Flüssigkeit gemessen. Schliesslich wurde wieder vorsichtig die Luftleitung an die Drähte DD geklemmt, und wiederum die halbe Wellenlänge in Luft $\frac{1}{2}\lambda$ bestimmt. Letzteres geschah, um sicher zu sein, dass während der Versuchsreihe $\frac{1}{2}\lambda$ constant geblieben wäre. Meistens war $\frac{1}{2}\lambda$ am Schluss etwa 0,1 % kleiner, als am Anfang, was jedenfalls durch die geringe Erwärmung des Petroleumbades des Erregers in Folge der Funken, und dementsprechende Verkleinerung seiner Dielektricitätsconstante verursacht wird. — Bei unverändertem Bügel B_1 erwies sich mehrere Tage hinter einander $\frac{1}{2}\lambda$ innerhalb $\frac{1}{2}$ % constant. Es ist die Frage, ob die Knotenlagen des Bügels B_2 in Luft und Flüssigkeit immer derselben Schwingungsdauer zugehören. Man kann nun bei grösseren Erregern bei fester Lage des Bügels B_1 in der That nicht nur die Grundschwingung, sondern auch die harmonischen Oberschwingungen, z. B. sehr gut die Octave, mit dem Bügel B_2 abgreifen[1]), dies geht aber nicht mehr, wenn als Indicator eine auf die Grundschwingung als Resonator ab-

1) Bei den vielen Arbeiten, die über die Knotensysteme gemacht worden sind, sind diese einfachsten Verhältnisse nicht gefunden, weil der erste Bügel B_1 über der Drahtleitung nicht fest liegen blieb, in der Meinung, dass die Periode nur vom Erreger abhinge. Dies trifft aber auch für die Lecher'sche Anordnung nicht zu. Dort ist die Erregerperiode daraus zu berechnen (dies bestätigen mir auch directe Versuche), dass in einem durch den ersten Bügel B_1 abgegrenzten Drahtsystem zwei Capacitäten, die von den gegenüberstehenden Platten des Erregers bezw. des Empfängers gebildet werden, in Reihe hintereinander geschaltet sind.

gestimmte Zehnder'sche Röhre benutzt wird. Auch sind die Oberschwingungen merklich schwächer, so dass sie z. B. beim kleinen Erreger überhaupt nicht wahrnehmbar waren. Ausserdem wird ein Ansprechen auf die Octave völlig vermieden, wenn man die Vacuumröhre auf einen elektrischen Bauch der Grundschwingung legt, da dies ein Knoten der Octave ist.

Je nach Umständen wurde ein grader Bügel B_1 gewählt, oder ein gebogener. Letzterer ergiebt grössere Intensität der Wellen hinter B_1. Es wurde stets diejenige Bügellänge gewählt, welche der grösstmöglichsten Einstellungsschärfe entsprach (vergl. weiter unten). Gerade für Flüssigkeiten mit starker Dämpfung ist es sehr wichtig, dass man hierdurch ein einfaches Mittel besitzt, die Wellen hinter B_1 beliebig in ihrer Intensität zu variiren.

Die Luftwellen wurden mit einem Holzmaassstab gemessen, dessen Theilung nicht genau identisch mit der Theilung der Metallschiene war, auf welcher der Wagen zum Abmessen der Flüssigkeitswellen rollte. Diese Correction war aber nur $\frac{1}{2}$ ‰, und daher als unwesentlich nicht berücksichtigt.

Die Absorption der elektrischen Wellen in der Flüssigkeit kann man dadurch schätzen, dass mit wachsender Absorption die Leuchtintensität der Röhre Z in den Knotenlagen von B_2 um so mehr abnehmen muss, je weiter B_2 vom Flüssigkeitsanfang entfernt liegt, während die Leuchtintensität in den Bauchstellungen von B_2 dadurch allmälich zunehmen muss. Schliesslich, bei einer gewissen Entfernung, die um so weniger Viertel-Wellenlängen umfasst, je stärker das Absorptionsvermögen der Flüssigkeit ist, tritt es ein, dass Knoten- und Bauchstellung von B_2 nicht mehr am Leuchten von Z zu unterscheiden ist.

Die beschriebene Erscheinung tritt nun allerdings auch schon ein, wenn auch in sehr geringem Grade, falls der Bügel B_2 längs einer langen Luftleitung verschoben wird. Die Luft hat sicher kein Absorptionsvermögen, die Ursache kann hier sowohl in der zeitlichen Dämpfung der vom Erreger entsandten Wellen, als in der Dämpfung in den Metalldrähten DD liegen, da deren Leitfähigkeit nicht eine unendlich grosse ist. Man überzeugt sich leicht, dass erstere Ursache die zweite bei weitem übertrifft. Mit einer Luftleitung von $2\frac{1}{2}$ m Länge von 1 mm dicken Kupferdraht erhält man mit dem

kleinen Erreger sehr gut 7 ausgeprägte (äquidistante) Knotenstellungen des Bügels (ob noch mehr zu erhalten sind, habe ich wegen der Umständlichkeit, die mit der grossen Länge der Luftleitung verbunden ist, nicht geprüft). Wird der 1 mm dicke Kupferdraht ersetzt durch $\frac{1}{2}$ mm dicken, so sind die 7 Knotenstellungen genau ebenso deutlich ausgebildet und kennzeichnen sich durch ebenso starkes Leuchten der Röhre Z, wie bei der 1 mm starken Leitung. Dies zeigt, dass keine merkliche Dämpfung der Wellen in den Drähten wegen ihres galvanischen Widerstandes vorhanden ist, denn sonst müsste sich die dickere Leitung merklich günstiger erweisen, als die dünnere.

Man erhält also durch Beobachtung des Leuchtens in den Knotenstellungen der Luftleitung ein Bild von der zeitlichen Dämpfung der Wellen. Am besten und bequemsten ist dasselbe zu erhalten, wenn man diese Beobachtungen macht, während die Drähte DD hinter dem ersten Knoten von destillirtem Wasser umgeben sind. Das Wasser hat bis zu den kleinsten der benutzten Wellen sicher keine anomale Dispersion und auswählende Absorption, die Absorption der Wellen ist demnach theoretisch aus dem nach gewöhnlichen Methoden zu entnehmenden elektrischen Leitvermögen des Wassers zu berechnen. Die Berechnung zeigt, dass für die Wellen des kleinen Erregers ($\frac{1}{2}\lambda = 37$ cm) die Absorption in destillirtem Wasser (Leitfähigkeit $K = 7 \cdot 10^{-10}$ bezogen auf Quecksilber) und selbst gewöhnlichem Leitungswasser ($K = 180 \cdot 10^{-10}$) vollkommen zu vernachlässigen ist. Der Theorie entsprechend sind daher die stehenden Wellen im Wasser ebenso gut ausgebildet, als in Luft, vielleicht sind sie sogar für destillirtes Wasser noch etwas deutlicher, als für Luft, da wegen der kürzeren Wellenlänge im Wasser die Dämpfung durch die endliche Leitfähigkeit der Kupferdrähte noch weniger beeinflusst werden kann, als in Luft.

Mit einem genügend langen Troge (50 cm lang) kann man nun in der That 12 Knotenlagen des Bügels B_2 noch gut erkennen[1]; in dem meist benutzten 30 cm langen Troge sind alle innerhalb des-

1) Dies Resultat ist unabhängig davon, ob das Petroleumbad des Erregers (cf. oben pag. 9) erneuert wird, und vom Putzen der Erregerkugeln, was übrigens wochenlang nicht nöthig ist. — Die zeitliche Dämpfung der Erregerwellen hängt also hiervon nicht ab.

selben fallenden Knotenlagen (7, exclusive der ersten Knotenlage an der Vorderwand) sehr gut zu erkennen, selbst mit Wasser der Leitfähigkeit $360 \cdot 10^{-10}$.

Ebenso normal, wie reines Wasser, verhalten sich wässrige Salzlösungen. Lösungen von Kupfersulfat und Kochsalz in destillirtem Wasser zeigen eine Absorption, die nur von ihrer für constante Ströme oder Ströme langsamer Wechselzahl stattfindenden Leitfähigkeit abhängt. Die Natur des Salzes bedingt also keinerlei Einfluss[2]). Man ist daher berechtigt, die Absorption der elektrischen Wellen in wässrigen Salzlösungen aus der für Ströme langsamer Wechselzahl stattfindenden Leitfähigkeit zu berechnen, und ist dadurch in den Stand gesetzt, die Absorptionscoëfficienten anderer Flüssigkeiten mit anomaler Absorption theoretisch zu berechnen, wenn man feststellt, mit welcher wässrigen Salzlösung sie für die betreffende Schwingungsdauer gleiche Absorption besitzen. Es ist dabei von Werth, dass die zeitliche Dämpfung der Wellen aus dem Verhalten in reinem Wasser zu entnehmen ist. Die Rechnung soll in einem nachfolgenden theoretischen Theile durchgeführt werden. Hier möchte ich nur mittheilen, wie gross die Absorption für sehr hohe Leitfähigkeiten wässriger Kupfersulfatlösungen ist, um dies als Maassstab für die Absorptionscoëfficienten anomal sich verhaltender Flüssigkeiten später benutzen zu können. Im Folgenden bedeutet K die nach der KOHLRAUSCH'schen Methode mit Inductorium, Telephon und gut platinirten Platinelektroden ermittelte Leitfähigkeit, bezogen auf Quecksilber. $+++$ bedeutet, dass die Einstellungen sehr gut gemacht werden können (in Knotenlage intensives Leuchten der Vacuumröhre, in Bauchlage vollständige Dunkelheit), $++$ bedeutet, dass der Knoten bezw. Bauch noch deutlich zu erkennen ist, aber weniger scharf

2) Dies findet auch hinsichtlich der Wellenlänge statt. Mit welcher Genauigkeit die Methode die Unabhängigkeit der Dielektricitätsconstante wässriger Lösungen von ihrer Leitfähigkeit bei den benutzten Wellen erweist, werde ich an anderer Stelle mittheilen. — Die verhältnissmässig noch starke Abhängigkeit der Dielektricitätsconstante wässriger Kochsalzlösungen, die COHN, Wied. Ann. **45**, p. 371, 1892, für Wellen der Länge 6 m in Luft angiebt, habe ich für diese achtmal schneller schwingenden Wellen jedenfalls nicht annähernd erhalten. — Beim Lesen der Correctur erhalte ich Kenntniss von einer soeben erschienenen Arbeit von P. ZEEMANN (Commun. fr. the Lab. of Phys. at the Univ. of Leiden, Nr. 22), welche bestätigt, dass die Dämpfung von der Natur des gelösten Salzes nicht abhängt.

ausgeprägt ist, als vorhin, + bedeutet, dass der Knoten bezw. Bauch nur noch sehr schwer zu erkennen ist, — bedeutet, dass er nicht mehr zu erkennen ist.

In der Tabelle ist die Einstellung für den in den Flüssigkeitsanfang fallenden Knoten nicht mit angeführt, da bei seiner Überbrückung die Vacuumröhre selbstverständlich immer gleich intensiv leuchtet.

$\frac{1}{2}\lambda$ bedeutet die halbe Wellenlänge (Knotenabstand) der Schwingungen, falls man sie mit der Luftleitung misst. In den Lösungen betrug die halbe Wellenlänge unabhängig von K nahezu den neunten Theil von $\frac{1}{2}\lambda$. Für die kurzen Wellen ist ein gerader Bügel B_1 benutzt worden, für die langen ein gebogener Bügel B_1 von 4 cm Länge[1]). Die Temperatur war bei diesen Beobachtungen dieselbe, wie bei Ermittelung des K (17° Celsius).

Kleiner Erreger. $\frac{1}{2}\lambda = 37.2$ cm.

K	1. Bauch	1. Knoten	2. Bauch	2. Knoten	3. Bauch
$6070 \cdot 10^{-10}$	+++	+++	++	+	—
$8260 \cdot 10^{-10}$	+++	++	+	—	—
$10000 \cdot 10^{-10}$	++	+	—	—	—
$17000 \cdot 10^{-10}$	+	+	—	—	—
$21300 \cdot 10^{-10}$	+	—	—	—	—

Grosser Erreger. $\frac{1}{2}\lambda = 100$ cm.

K	1. Bauch	1. Knoten	2. Bauch	2. Knoten	3. Bauch
$2000 \cdot 10^{-10}$	+++	+++	++	+	—
$3400 \cdot 10^{-10}$	++	+	—	—	—
$4480 \cdot 10^{-10}$	++	+	—	—	—
$6070 \cdot 10^{-10}$	+	—	—	—	—

1) Die Bügellänge ist so zu wählen, dass, falls B_2 soweit in die Flüssigkeit geschoben wird, dass die an ihm reflectirten Wellen keinen Einfluss auf das Leuchten der Röhre haben können, dieselbe gerade noch schwach und gleichmässig leuchtet. — Hierauf ist bei der Bestimmung der Absorption anderer Flüssigkeiten auch stets geachtet worden.

Wie aus den Tabellen ersichtlich, sind die Werthe von K, welche ungefähr die gleiche Anzahl Einstellungen erlauben, nahezu umgekehrt proportional zu λ. Dieses Gesetz folgt auch aus der Theorie, da nach ihr[1]) das Verhältniss der Intensität der Leitungsströme zu der der MAXWELL'schen Verschiebungsströme proportional dem Product der Leitfähigkeit in die Wellenlänge ist[2]). — Bei Herstellung von Wellen der Grösse $\frac{1}{2}\lambda = 6$ cm, welche man mit Drahtwellen (vergl. meine frühere Mittheilung), oder der Grösse $\frac{1}{2}\lambda = 0{,}6$ cm, welche man nach LEBEDEW[3]) mit Luftwellen erzielen kann, müsste man demnach noch Substanzen der Leitfähigkeit $K = 12 . 10^{-6}$ bezw. $1 . 10^{-4}$ auf Bildung stehender Wellen hin untersuchen können. — Es ist zu bemerken, dass für eine Flüssigkeit, welche noch den ersten Bauch, nicht mehr den ersten Knoten zu ermitteln erlaubt, die Welle (wegen der Reflexion am Bügel) erst nach Durcheilen einer ganzen Wellenlänge todt sein muss.

2. Widerstandsmethode.

An Stelle der Leuchtintensität in der Vacuumröhre kann man[4]) gut die Messung des galvanischen Widerstandes ihres luminiscirenden Gasraumes benutzen zur Abschätzung der Intensität der elektrischen Kraft an der Vacuumröhre, wenn der Bügel B_2 auf der Drahtleitung verschoben wird. Man erzielt dadurch den Vortheil, dass man so in gewisser Weise das Bild der Welle längs der ganzen

---

1) Vgl. P. DRUDE, Phys. d. Aethers, p. 549.

2) E. COHN hat Wied. Ann. 45, p. 370, 1892, für Wellen, deren $^1/_2\lambda = 292$ cm betrug, NaCl-Lösungen der Leitfähigkeit $500 . 10^{-10}$ untersuchen können. Nach der COHN'schen Methode musste die Flüssigkeit die Ermittelung eines ersten Knotens gestatten. Nach den hier angegebenen Resultaten müsste der obere Grenzwerth von K für solche Wellen etwa $1000 . 10^{-10}$ sein, was mit dem COHN'schen Resultat insofern ganz gut stimmt, als die zeitliche Dämpfung der von dem hier benutzten Erreger ausgesandten Wellen wahrscheinlich kleiner ist, als beim Erreger, den COHN benutzt hat. cf. P. DRUDE, Wied. Ann. 55, pag. 635, 1885.

3) P. LEBEDEW, Wied. Ann. 56, p. 1, 1895.

4) P. DRUDE, Wied. Ann. 53, p. 761, 1894.

Drahtleitung erhalten kann. Da der Widerstand der luminiscirenden Gasstrecke sehr hoch ist (Millionen Ohm), so verwendet man zu seiner Messung passend ein Elektrometer, anstatt eines Galvanometers. Die Versuchsanordnung war ganz ähnlich, wie ich sie früher (l. c., vergl. dort das Detail) für Luftwellen angewandt und beschrieben habe. Es wurden zwei als Resonatoren gleich abgestimmte Zehndersche Röhren Z_1 und Z_2 angewandt, von denen Z_1 in der im Vorigen benutzten Lage hinter B_1 lag, während Z_2 dicht vor B_1 lag und als Reagens auf die magnetische Kraft angewandt wurde. Z_2 diente als Standard-Röhre für die Erregerschwingungen, der Widerstand von Z_1 wurde durch ein Thomson'sches Quadrant-Elektrometer mit dem Widerstand von Z_2 bei verschiedenen Bügellagen B_2 verglichen. Die Nadel des Elektrometers wurde, falls Z_1 gut leuchtet, während Z_2 (durch Entfernung von der Drahtleitung DD) dunkel bleibt, zum Potential von 167 Kupfer-Zink-Elementen, die in Leitungswasser tauchten, geladen. Wenn dagegen Z_1 dunkel ist und Z_2 leuchtet (was es in seiner bei den Versuchen benutzten Lage vor B_1 immer thut), so war das Nadelpotential durch Leitung über Z_2 gleich Null. Die Quadranten des Elektrometers waren zur Potentialdifferenz von 3 Kupfer-Zink-Elementen geladen.

Bei vollkommener Dunkelheit von Z_1 hätte die Elektrometernadel keinen Ausschlag bei Ingangsetzen des Inductoriums J zeigen dürfen. Trotzdem fand ein solcher statt, weil die auf Zuleitungsdrähten AA vorhandenen elektrostatischen Ladungen auf die Elektrometerzuleitung wirkten. Dieser Ausschlag ist bestimmt, indem unmittelbar vor oder hinter Z_1 ein Bügel B_2 aufgelegt wurde. Z_1 leuchtet dann gar nicht. Dieser Ausschlag ist als Nullpunkt von den bei anderen Bügelstellungen B_2 erhaltenen Ausschlägen in Abzug gebracht. Es wurden immer die Ausschläge von der Ruhelage aus beobachtet, und für jede Lage des Bügels B_2 das Mittel aus drei Ausschlägen genommen. Die Beobachtungen wurden der Zeit nach symmetrisch angestellt, und das Mittel aus den beim Hin- und Rückgang des Bügels erhaltenen Ausschlägen genommen.

Folgende Tabelle enthält die Resultate, wie sie mit dem kleinen Erreger ($\frac{1}{2}\lambda$ in Luft 36,8 cm) für reines Wasser, Lösungen von Kupfersulfat und Chlornatrium und Glycerin bei 18° Celsius erhalten sind. d bedeutet die Entfernung des Bügels vom Flüssigkeitsanfang

in Centimetern, a die Elektrometerausschläge (Differenz der Ausschläge gegen den Nullausschlag, vergl. oben) in Millimetern der mit dem Elektrometerspiegel in 2 m Entfernung beobachteten Scala, und zwar

a_1 für destillirtes Wasser $K = 7 \cdot 10^{-10}$
a_2 für $CuSO_4$ + aq. $K = 880 \cdot 10^{-10}$
a_3 für NaCl + aq. $K = 922 \cdot 10^{-10}$
a_4 für NaCl + aq. $K = 1550 \cdot 10^{-10}$
a_5 für $CuSO_4$ + aq. $K = 1730 \cdot 10^{-10}$
a_6 für $CuSO_4$ + aq. $K = 11200 \cdot 10^{-10}$
a_7 für $CuSO_4$ + aq. $K = 20000 \cdot 10^{-10}$
a_8 für Glycerin $K = 2{,}8 \cdot 10^{-10}$.

d	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
0,0	239	217	225	217	184	180	188	170
0,5	226	—	202	212	182	171	162	—
1,0	119	—	128	146	173	148	142	178
1,5	2	101	27	73	109	130	117	—
1,8	—	56	—	—	72	125	117	—
2,0	83	82	39	66	67	132	128	110
2,5	89	105	42	87	92	134	137	—
3,0	147	162	79	118	122	153	150	73
3,5	190	176	141	135	139	157	146	—
4,0	211	198	165	142	148	150	146	73
4,5	208	192	170	143	142	158	148	—
5,0	174	173	116	122	136	149	143	92
5,5	78	124	49	96	119	150	—	—
6,0	38	50	13	90	115	—	—	96
6,5	92	93	47	92	123	—	—	—
7,0	122	143	87	104	121	—	—	104
7,5	168	161	111	126	134	—	ohne B_2	—
8,0	183	180	149	132	134	—	146	100
8,5	186	171	129	130	146	—	—	—
9,0	157	163	120	130	145	—	—	101
9,5	122	143	68	114	141	—	—	—
10,0	49	102	39	109	138	—	—	109
10,5	54	93	28	112	—	—	—	—
11,0	106	118	57	106	—	—	—	—
11,5	147	137	77	111	—	—	—	—
12,0	167	174	91	112	—	—	—	—
12,5	174	145	104	—	—	—	—	—

d	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
13,0	166	155	95	125	—	—	—	—
13,5	139	136	80	118	—	—	—	—
14,0	95	105	45	—	—	—	—	—
14,5	58	80	42	116	—	—	—	—
15,0	92	92	52	—	—	—	—	—
15,5	123	121	71	—	—	—	—	—
16,0	159	146	92	—	—	—	—	—
16,5	168	147	99	—	—	—	—	—
17,0	166	137	103	—	—	—	—	—
17,5	154	124	103	—	—	—	—	—
18,0	109	105	75	—	—	—	—	—
18,5	100	80	53	—	—	—	—	—

Die Resultate der Tabelle sind in den Curven der Tafel I graphisch dargestellt. Die Abscissen sind die Entfernung d der Brücke B_2 in natürlicher Grösse, die Curven stellen daher die in der Flüssigkeit fortgepflanzten elektrischen Wellen hinsichtlich der Lage ihrer Knoten und Bäuche in natürlicher Grösse quantitativ, hinsichtlich ihrer Absorption qualitativ dar. Die Ordinaten sind die Elektrometerausschläge a, von den stark in der Tafel gezeichneten geraden Linien als Nulllinien aus gerechnet. Aus den Curven kann man anschaulich entnehmen, dass beim Wasser und den wässrigen Salzlösungen die Lage der Knoten und Bäuche unabhängig von der Leitfähigkeit ist, und dass die halbe Wellenlänge $\frac{1}{2}\lambda'$ etwa 16,5 : 4 = 4,12 ist. Es ist daher

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda'}\right)^2 = \left(\frac{36,8}{4,12}\right)^2 = 80,0 \text{ für die Temperatur } 18° \pm 0,5°.$$

Diese Zahl direct mit dem Quadrat des elektrischen Brechungsexponenten zu identificiren ist nur gestattet, so lange das Quadrat des Absorptionscoëfficienten gegen diese Zahl zu vernachlässigen ist (vergl. den später nachfolgenden theoretischen Theil).

Diese Beobachtungen sollen aber weniger dazu dienen, das Verhältniss $\lambda : \lambda'$ genau zu ermitteln, da dieses schärfer mittelst der Methode der Leuchtwirkungen möglich ist, als vielmehr anschaulich das Wachsen der Absorption mit steigender Leitfähigkeit zu erweisen. Dieses Wachsen der Absorption richtet sich, wie die Curven zeigen, nur nach der Leitfähigkeit K, nicht nach der Natur des gelösten Salzes.

Die oben Seite 17 angegebene Tabelle über die Abhängigkeit der Anzahl der zu ermittelnden Knoten und Bäuche von der Leitfähigkeit K widerstreitet den Curven der Tafel nicht.

Ganz eclatant zeigt sich aus den Curven das abnorme Verhalten des Glycerins, da dies an Dämpfung der $CuSO_4$-Lösung mit $K =$ 20000 etwa gleichkommt. Andere Versuche, die mit Leuchtwirkungen angestellt worden sind, werden unten bei näherer Besprechung des Glycerins noch angeführt. Die Viertel-Wellenlänge im Glycerin ist (nahezu, nicht genau wegen der Bügelverkürzung, vergl. den folgenden Abschnitt)

$$\tfrac{1}{4}\lambda' = 3{,}5.$$

Daraus berechnet sich für Glycerin

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda'}\right)^2 = \left(\frac{36{,}8}{7{,}0}\right)^2 = 27{,}6.$$

Diese Widerstandsmethode ist auf andere Flüssigkeiten nicht angewandt worden, da sie sehr zeitraubend ist und die Methode der Leuchtwirkungen nicht nur schneller, sondern auch sicherer arbeitet.

3. Besprechung anderer Methoden.

Um alles durchzuprobiren habe ich auch mit Hülfe der von BJERKNESS angewandten Elektrometermethode die Knotenlagen des Bügels B_2 zu ermitteln gesucht, indem ein kleines Quadrantelektrometer in der von BJERKNESS benutzten Form, über dessen Quadrante (welche Kreisquadranten von 1,5 cm Radius bildeten) ein an einem feinen Quarzfaden aufgehängte Alumiumnadel dicht schwebte, mit ganz kurzer (1 cm langer) Zuleitung an die Drähte DD $^1/_4\,\lambda$ hinter B_1 angelegt wurde. Die erste Knotenlage von B_2 kennzeichnete sich durch grösseren Ausschlag des Elektrometers, indess war er so gering, zumal bei den weiteren Knotenlagen des B_2, dass ich diese Methode als aussichtslos für diese kurzen Wellen verlassen habe.

Ebenso wenig hatte ich Erfolg mit der von KLEMENCIC oft angewandten Methode des Thermoelementes, indem zwei Rubens'sche Flaschen über DD gezogen wurden, um welche die Enden zweier sehr feiner Drähte aus Eisen und Constantan geschlungen waren, die über Kreuz geschlagen waren (mit Spannung) und ein Thermoelenment bildeten. Die Erwärmung der Contactstelle wurde mit einem

Thomson'schen oder Du Bois'schen Galvanometer mit passendem Widerstande beobachtet.

Es ist offenbar zur sicheren Beobachtung der Wirkungen dieser schnellen Schwingungen die Gestaltung des Indicators als Resonator von grosser Wichtigkeit, durch einfaches Überlegen der Zehnder'schen Röhre über die Drähte *DD*, ohne sie als Resonator zu benutzen, konnte ich bei dem kleinen Erreger nicht so gut die Wirkung der Wellen beobachten.

Fehlerquellen.

Da aus dem Nachfolgenden hervorgehen wird, dass die Methode der Leuchtwirkungen eine grosse Präcision gestattet, so möge es mir verstattet sein, etwaige Fehlerquellen ausführlich zu besprechen.

1. Seitliche Begrenzung der Flüssigkeit.

Der Knotenabstand in der Flüssigkeit gestattet streng genommen nur dann die Berechnung des elektrischen Brechungsexponenten, wenn die Flüssigkeit unbegrenzt ist. Dies kann man praktisch nicht erreichen, doch kommt es hier offenbar nicht auf die absolute Grösse des Troges, sondern nur auf das (quadratische) Verhältniss der Querdimensionen des Troges zum Abstand der Drähte *DD* an. Bei dem von mir angewandten Trog war die Flüssigkeitsgrenze 4—5 cm von den Drähten entfernt. Der hierdurch entstehende Fehler wird um so kleiner, je näher die Drähte *DD* bei einander liegen, denn zur Abschätzung des Fehlers kann man offenbar das Verhältniss der Stärke des elektrischen Feldes an den Grenzen der Flüssigkeit zu der Stärke des Feldes in der Mitte zwischen den Drähten *DD* heranziehen. Dies Verhältniss lässt sich leicht angeben, da es, wie die (durch Experimente durchaus bewährte) Theorie lehrt, dasselbe sein muss, als ob beide Drähte *DD* unendlich lang wären und gleichförmig mit Elektricität verschiedenen Vorzeichens, aber gleichen absoluten Betrages geladen wären.

Nennt man r die Entfernung eines Punktes P von dem ihm nächsten der Drähte, so ist für ein festes r die elektrische Kraft F in P am grössten, falls P senkrecht über der Mitte der Ebene

beider Drähte liegt. Das Verhältniss der elektrischen Kraft in P zu der elektrischen Kraft F_0 mitten zwischen beiden Drähten ist dann, wenn der Raum überall von demselben Isolator angefüllt ist:

$$F : F_0 = a^2 : 4 r^2,$$

falls a den Axenabstand beider Drähte bezeichnet. Wenn nun dies Verhältniss sehr klein wird, so kann es auch nur eine sehr kleine Änderung in den Knoten der Drahtwellen bedingen, wenn jenseit der Entfernung r die Dielektricitätsconstante einen anderen Werth besitzt, also die zu untersuchende Flüssigkeit begrenzt ist. — Ausserdem wird für ein bestimmtes a und r der Einfluss der Begrenzung der Flüssigkeit auf die Knotenlagen um so grösser, je grösser der Unterschied in den Dielektricitätsconstanten der Flüssigkeit und ihrer Umgebung ist. Die Wellenlänge kommt bei diesen Fragen nicht in Betracht.

Nun haben COHN und ZEEMANN[1]) in einem Steintrog, in welchem die Drähte DD in 7 cm Distanz von einander und 10 cm über dem Boden verliefen, die Knotenlagen nicht merklich beeinflusst gefunden, wenn der Trog voll Wasser bis zur Höhe von 18 bis 28 cm über dem Boden gefüllt wurde. Für 18 cm Wasserhöhe ist r an der Wasseroberfläche über den Drähten 8 bis 9 cm zu setzen. Daher

$$F : F_0 = 7^2 : 4(8,5)^2 = 0,17.$$

Wenn bei diesem Verhältniss $F : F_0$ die von Luft umgebene Wassermasse wie eine unendlich ausgedehnte sich verhält, so kann man bei 1,8 cm Axenabstand das kleinste r schon als 2,2 cm, die Querdimensionen des Troges also als rund 5 bis 6 cm wählen, ohne merkliche Fehler in den Knotenlagen zu erhalten[2]). — Bei anderen Flüssigkeiten mit kleinerer Dielektricitätsconstante ist dies a fortiori der Fall.

Ich habe auch mit Hülfe eines sehr viel grösseren Thonkastens, für welchen die Entfernung r 12 cm betragen konnte, die Abhängigkeit der Knotenlagen von r im Wasser untersucht, indem ich, ohne an den Apparaten sonst irgend etwas zu ändern, das Wasser in ver-

1) E. COHN u. P. ZEEMANN, Königl. Akad. d. Wiss. zu Amsterdam, Sept. 1895.

2) Für $a = 1$ cm braucht r nur 1,2 cm zu sein, die Querdimensionen des Troges 3 cm. Deshalb braucht man weniger als den zehnten Theil der von mir benutzten Substanzmengen, um sie trotzdem noch mit derselben Genauigkeit untersuchen zu können.

schiedenen Höhen über den Drähten stehen liess. Der Bügel B_2 wurde auf den fünften im Wasser hinter der Vorderwand liegenden Knoten k_5 eingestellt, die Einstellungen sind (abgesehen von der letzten Beobachtung, bei der die Drähte nur vom Wasser berührt wurden) mindestens als auf 0,5 mm sicher anzusehen. Da k_5 von der Vorderwand um 20 cm entfernt lag, so kann dadurch eine Änderung der Knotenlagen um $\frac{1}{4}$% noch mit Sicherheit constatirt werden. Die Temperatur wurde fortwährend beobachtet. — Die Drähte befanden sich in 1,8 cm Axenabstand, in 20 cm Entfernung vom Boden des Troges, in 12 cm Entfernung von den Seitenwänden. Für diese ist daher r als unendlich gross anzusehen. In der Tabelle bedeutet r die Höhe des Wassers in cm über den Drähten, ϑ die Temperatur, k_5 den Abstand des 5. Knotens im Wasser von der Vorderwand, vermehrt um die Bügelverkürzung 5 mm im Wasser (vgl. die Besprechung der vierten Fehlerquelle, der Wasseranfang lag in einem wahren Knoten), k_5' die auf gleiche Temperatur reducirten Knotenabstände k_5, berechnet von dem bei $r = 6,8$ cm beobachteten k_5 als Normalpunkt aus, und mit Hülfe des Heerwagen'schen[1]) Temperaturcoefficienten, den ich durch ausführliche Messungsreihen (die ich später mittheilen werde) sehr gut bestätigt gefunden habe. Die Differenz $k_5 - k_5'$ lässt also den Einfluss der Verkleinerung von r erkennen. ε bedeutet die Dielektricitätsconstante des Wassers, wie sie sich berechnet aus den Daten $\frac{1}{2}\lambda$ (Luft) $= 37,2$ cm, $\frac{1}{2}\lambda'$ (Wasser) $= k_5 : 5$; schliesslich ist ε' die Dielektricitätsconstante des Wassers nach Heerwagen für die betreffenden Temperaturen.

r	ϑ	k_5	k_5'	ε	ε'
6,8	11,3	20,51	20,51	82,2	82,9
3,8	11,8	20,50	20,53	82,2	82,8
1,9	12,2	20,64	20,55	81,3	82,6
0,9	12,5	21,66	20,56	74,0	82,5
0,0	12,5	24,6	20,56	57,5	82,5

Diese Resultate sind in Einklang mit den vorigen Überlegungen, welche die Cohn'schen und Zeemann'schen Versuche verwertheten. Ein Einfluss von r erscheint erst beim Werthe $r = 1,9$ cm, für

1) F. Heerwagen, Wied. Ann. 49, p. 279, 1893.

welche die Knotenlage $k_5 - k'_5$ um $\frac{1}{2}$ % grösser, die Dielektricitätsconstante ε daher um 1 % kleiner ausfällt, als für grosses r.

Bei den Dimensionen des beschriebenen, hier angewandten kleinen Thontroges sind demnach keine Fehler durch die seitliche Begrenzung der Flüssigkeit zu erwarten.

Übrigens kann man in jedem Falle noch als directe Controlle zur Entscheidung, ob die endliche Begrenzung der Flüssigkeit Einfluss hat, oder nicht, die Knotenlage untersuchen, während die Flüssigkeit an Metall angrenzt[1]). Wenn die Flüssigkeit als praktisch unendlich gross anzusehen ist, so kann durch die Metallumgrenzung der Knotenabstand nicht geändert werden. — Wie unten angeführt ist, wurde ein solcher Versuch mit Aethylalkohol ausgeführt. In der That blieb der Knotenabstand unverändert.

2. Die Vernachlässigung des galvanischen Widerstandes der Kupferdrähte.

Die Theorie der elektrischen Drahtwellen lässt sich nur vollkommen durchführen, wenn man den galvanischen Widerstand der Drähte, längs welcher die elektrischen Wellen fortgepflanzt werden, vernachlässigen kann. Die elektrischen Kraftlinien stehen dann senkrecht auf den Oberflächen der Drähte[2]), die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen muss in einem Isolator umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus seiner Dielektricitätsconstante sein. — Es ist nun die Frage zu untersuchen, ob in der That der galvanische Widerstand der 1 mm dicken Kupferdrähte bei den hier benutzten Schwingungsdauern vernachlässigt werden kann.

Eine genauere theoretische Überlegung[3]) zeigt, dass die Vernachlässigung des galvanischen Widerstandes der Drähte gestattet ist, wenn die Grösse

$$\Phi = \sqrt{\frac{\varepsilon \mu'}{\sigma'}} : \frac{4 \pi R \lg \text{nat} \frac{a}{R}}{\sqrt{T}}$$

gegen 1 zu vernachlässigen ist.

1) Vgl. E. COHN u. P. ZEEMANN, l. c. p. 2. — Man kann auch zur Controle den Axenabstand a der Drähte verkleinern.

2) Vgl. P. DRUDE, Phys. d. Äthers, p. 449.

3) Vgl. Phys. d. Äthers, pag. 387—389, 452.

Hierin bezeichnet ε die Dielektricitätsconstante der Umgebung der Drähte, μ' die Magnetisirungsconstante der Drähte, σ' ihre specifische galvanische Leitfähigkeit[1]) nach absolutem elektromagnetischem cgs-Maass (für Quecksilber ist $\sigma' = 1{,}063 . 10^{-5}$), R den Radius der Drähte, a ihren Axenabstand, T die Schwingungsdauer der Welle. In unserem Falle, für Kupferdrähte, ist bei Wasserumgebung der Drähte:

$$\varepsilon = 80, \; \mu' = 1, \; \sigma' = 60 . 10^{-5}. \quad R = 0{,}05 \text{ cm}, \; a = 1{,}8 \text{ cm},$$

$$T = \frac{74}{3 . 10^{10}} = 25 . 10^{-10} \text{ für den kleinen Erreger,}$$

$$T = \frac{200}{3 . 10^{10}} = 67 . 10^{-10} \text{ für den grossen Erreger.}$$

Daher wird die Grösse Φ:

$$\Phi = 3{,}6 : 450 \text{ beim kleinen Erreger,}$$
$$\Phi = 3{,}6 : 280 \text{ beim grossen Erreger.}$$

Die Theorie lehrt ferner, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen erst durch das Quadrat von Φ beeinflusst wird, die Dämpfung der Wellen von Φ selbst. Das Quadrat von Φ ist nun aber unbedenklich gegen 1 zu vernachlässigen, die Dämpfung kann ebenfalls nur unmerkbar durch Φ beeinflusst werden. Für andere Substanzen, deren ε kleiner als beim Wasser ist, liegen die Verhältnisse noch weit günstiger.

Wenn die, die Drähte DD umgebende Substanz kein vollkommener Isolator ist, sondern die Leitfähigkeit σ (nach gleichem Maasse gemessen, wie σ') besitzt, so treten in ihr sowohl (Maxwell'sche) Verschiebungsströme, als Leitungsströme auf. Das Verhältniss der Stärke derselben hängt ab[2]) von

$$\Psi = 2c\sigma\lambda : \varepsilon,$$

wobei λ die Wellenlänge der Schwingung in Luft, c die Zahl $3 . 10^{10}$ bedeutet. Hiernach werden für die kurzen Wellen ($\lambda = 74$ cm) in wässrigen Lösungen

$$\Psi = 1 \text{ für } \sigma = 0{,}18 . 10^{-10}, \; K = 17000 . 10^{-10},$$

---

1) Es ist nur die Leitfähigkeit der Drähte in der Nähe ihrer Oberfläche massgebend. Daher wurden die Drähte blank geschmirgelt.

2) Vgl. Phys. d. Äthers, p. 549.

für die langen Wellen ($\lambda = 200$ cm)

$$\Psi = 1 \text{ für } \sigma = 0{,}066 \,.\, 10^{-10},\ K = 6300 \,.\, 10^{-10}.$$

K bedeutet die Leitfähigkeit bezogen auf Quecksilber.

Für Substanzen, für welche $\Psi > 1$ ist, würden die Leitungsströme in ihnen von grösserem Gewicht sein, als die Verschiebungsströme, um die hier discutirte Frage zu entscheiden, ob der galvanische Widerstand der Drähte DD vernachlässigt werden kann. Es würde sich dann um Abschätzung der Grösse handeln:

$$\Phi' = \sqrt{\frac{2c\sigma\lambda\mu'}{\sigma'}} : \frac{4\pi R}{\sqrt{T}} \lg \text{nat} \frac{a}{R},$$

oder, da $T = \lambda : c$,

$$\Phi' = \sqrt{2\mu'\frac{\sigma}{\sigma'}} : \frac{4\pi R}{\lambda} \lg \text{nat} \frac{a}{R}.$$

Diese Fälle, für welche Ψ wesentlich grösser als 1 ist, haben aber deshalb kein praktisches Interesse, weil man in Flüssigkeiten von dementsprechend hohem Leitungsvermögen keine Knoten oder Bäuche elektrischer Wellen mehr nachweisen kann[1]. Denn, wie ein Blick auf die oben Seite 17 mitgetheilte Tabelle lehrt, bilden die Leitfähigkeiten $K = 17000 \,.\, 10^{-10}$, bezw. $K = 6300 \,.\, 10^{-10}$ ungefähr die Grenzwerthe, für welche soeben noch der erste Bauch der elektrischen Welle in der Flüssigkeit erkannt werden kann.

Wir haben also zu schliessen, dass für alle überhaupt nach dieser Methode untersuchungsfähigen Flüssigkeiten die Leitungsströme wohl von ungefähr gleicher Stärke, wie die Verschiebungsströme sein können, aber nicht wesentlich stärker. — Daher ist die an die Verschiebungsströme anknüpfende Rechnung allgemein bindend, dass bei der getroffenen Anordnung ($a = 1{,}8$ cm, $R = 0{,}05$ cm) der galvanische Widerstand der Drahtleitung wirklich zu vernachlässigen ist, und die elektrischen Kraftlinien senkrecht zur Drahtoberfläche angenommen werden können.

Eine directe Controle, ob der Drahtwiderstand Einfluss hat, oder nicht, kann man dadurch ausüben, dass man die Dicke ($2R$) der Drahtleitung, oder auch ihren Axenabstand a variirt. Ersteres ist von grösserer Entscheidung, als letzteres. Ich habe beides für Wasser ausgeführt, indem ich sowohl a auf 1 cm verringerte, als

1) Ähnlich wie in einem Metall keine Newton'schen Ringe zu Stande kommen.

auch die Dicke der Drähte auf $\frac{1}{2}$ mm. Die Resultate der Versuche werde ich bei anderer Gelegenheit ausführlicher mittheilen; hier sei nur bemerkt, dass innerhalb $\frac{1}{3}$% der elektrische Brechungsexponent derselbe blieb.

Wie die Betrachtung der hier berechneten Grösse Φ ergiebt, empfiehlt es sich nicht, um den Einfluss des galvanischen Widerstandes der Drähte nicht zu erhöhen, den Abstand a der Drähte zu klein zu machen (was sonst praktisch wäre, da man dann um so kleineren Querschnitt des Troges und um so geringere Substanzmengen anwenden kann). Ausserdem müssen bei zu kleinem Abstand a, der etwa kleiner als 0,3 cm ist, geringe Verbiegungen der Drähte merklich auf Unregelmässigkeit (verschiedene gegenseitige Abstände) der Knoten und Bäuche hinwirken. — Nach den hier ausgeführten Schätzungen ist aber $a = 1$ cm jedenfalls noch zulässig (vgl. Seite 24 Anm. 2 und Seite 10).

3. Die galvanische Leitfähigkeit der Flüssigkeit.

Dass diese (in den praktisch untersuchbaren Grenzen) nicht ein merklich schiefes Eintreten der elektrischen Kraftlinien in die Drahtoberfläche veranlasst, und dadurch die Theorie wesentlich complicirt und eventuell undurchführbar macht, habe ich soeben im vorigen Abschnitt besprochen. Hier möchte ich nur darauf hinweisen, dass bei grossem Absorptionscoefficienten der eigentliche elektrische Brechungsexponent nicht einfach als Verhältniss der Wellenlängen sich ergiebt. Die exacten Formeln zur Berechnung sollen in einem nachfolgenden theoretischen Theil gegeben werden.

4. Einfluss der Lage des Flüssigkeitsanfangs.

Es ist darauf zu achten, dass der Anfang der Flüssigkeit genau mit einem wahren Knoten der elektrischen Kraft (zweckmässig dem ersten hinter B_1) zusammenfällt. Durch die Bügelstellungen B_2 kann man nun wohl den gegenseitigen Abstand mehrerer Knoten, aber direct nicht diese selbst erhalten, weil wegen der endlichen Länge des Bügels (1,8 cm) die wahren Knoten, d. h. diejenigen Punkte, welche $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{2}$ etc. Wellenlängen hinter B_1 liegen, falls B_2 nicht

aufgelegt, oder weiter zurück aufgelegt wird, etwas hinter den Knotenlagen von B_2 liegen.

Dieser Punkt ist hauptsächlich von Wichtigkeit bei der Untersuchung von Flüssigkeiten mit grosser Dielektricitätsconstante, falls man dieselbe auf mindestens 1% bestimmen will, z. B. beim Wasser. Ich habe mich durch directe Versuche davon überzeugt (die ich bei späterer Gelegenheit mittheilen werde), dass die Dielektricitätsconstante des Wassers, d. h. das Quadrat ihres elektrischen Brechungsexponenten, um etwa 1% abweichend bestimmt wird, wenn der Wasseranfang einmal in die erste Knotenlage von B_2, andrerseits in den ersten wahren elektrischen Knoten verlegt wird. Den Grund dieser Erscheinung gedenke ich bei späterer theoretischer Auseinandersetzung anzugeben, hier mag genügen, dass, wie es von vornherein plausibel ist, die richtigen Werthe des Brechungsexponenten und der Dielektricitätsconstanten erhalten werden, wenn der Flüssigkeitsanfang in den wahren Knoten fällt.

Die Lage des wahren Knotens hinter der Knotenlage von B_2, oder, wie ich kurz sagen will: die Bügelverkürzung, habe ich in folgender Weise ermittelt:

Beim Beginn der Versuche mit dem kleinen Erreger wurden die Drähte *DD* des Empfängers 1½ m lang hinter dem Halter H_1 ausgespannt, ohne dass sie durch einen Zwischenhalter H_2 oder kleine Klemmschrauben (welche je nach ihrer Lage wegen ihrer Capacität die Knotenlagen um etwa 1—2 mm näher an B_1 heranrücken) störend beeinflusst waren. Es wurden zwei gleich gebaute Zehnder'sche Röhren Z_1 und Z_2, deren Resonatoren genau gleiche Eigenschwingungen besassen, über *DD*[1]) in correspondirenden Lagen hinter B_1 gelegt, d. h. mit einer halben Wellenlänge Abstand von einander. Für maximales Leuchten der ersten Röhre Z_1 hinter B_1 musste ein Bügel B_2 in 35,8 cm Abstand von B_1 aufgelegt werden. Wenn dann dieser Bügel B_2 hier liegen blieb, so musste hinter ihm in 71,5 cm Abstand von B_1 ein dritter Bügel B_3 aufgelegt werden, damit die zweite Röhre Z_2, die zwischen B_2 und B_3 lag, maximal leuchtete.

1) Es wurde darauf geachtet, dass die Röhren genau die gleichen Abstände und relativen Lagen zu den Drähten *DD* besassen, damit auch ihre Capacitätswirkungen (die unter Umständen 1 cm Verkürzung der Knotenlagen bewirken) die gleichen waren.

Wurde B_2 fortgenommen, so musste B_3 um 2,1 cm nach hinten, d. h. in 73,6 cm Abstand von B_1 gerückt werden, damit beide Röhren, sowohl Z_1 als Z_2 maximal leuchteten. Aus Symmetrie muss in letzterem Falle der wahre Knoten in der Mitte zwischen B_1 und B_3 liegen, d. h. in 36,8 cm Abstand von B_1. Da die Knotenlage von B_2 35,8 cm Abstand besass, so beträgt also die Bügelverkürzung in diesem Falle 1 cm.

Durch diesen Versuch wird experimentell gezeigt, dass, wenn man für eine zweite Röhre Z_2 die Knotenlagen eines hinteren Bügels B_3 mit und ohne Zwischenbügel B_2 untersucht, die Differenz der Knotenlagen B_3 die doppelte Bügelverkürzung von B_2 beträgt, was die Überlegung auch sofort ergiebt, da B_2 ebensowohl für die Drahtleitung vor B_2, als für die hinter B_2 gleich verkürzend wirkt.

Diese Überlegung zeigt auch, dass man am fertigen Apparat, bei welchem die Distanz des ersten wahren Knotens von B_1 in Folge der Capacitätswirkung der kleinen Klemmschrauben, des Ebonithalters H_2 und der Zehnder'schen Röhre Z verkleinert sein kann (diese Verkleinerung beträgt in der That etwa 1 cm), die Bügelverkürzung dadurch bestimmen kann, dass hinter der ersten Knotenlage von B_2 eine Vacuumröhre über die Drähte gelegt wird (sie braucht nicht als Resonator benutzt zu werden), vermittelst deren man die Knotenlagen eines Bügels B_3 mit und ohne Zwischenbügel B_2 bestimmt. Die Differenz dieser Knotenlagen beträgt die doppelte Bügelverkürzung von B_2.

In dieser Weise habe ich aus mehreren späteren Versuchen 8 mm Bügelverkürzung für die kurzen Wellen des kleinen Erregers ($\frac{1}{2}\lambda = 37$ cm), 10 mm Bügelverkürzung für die längeren Wellen des grossen Erregers ($\frac{1}{2}\lambda = 1$ m) erhalten. Im letzteren Falle kommt es bei der Grösse der Wellen nicht darauf an, wenn die Bügelverkürzung um 2 mm falsch bestimmt sein sollte. Im ersteren Falle auch kaum, aber wohl würde es für Präcisionsmessungen am Wasser Einfluss haben, wenn der Wasseranfang ganz ohne Berücksichtigung der Bügelverkürzung in die erste Bügelknotenlage und nicht in die erste wahre Knotenlage verlegt würde. — Die Bügelverkürzung desselben Bügels nimmt bei derselben Periode mit abnehmender Wellenlänge ab, dies zeigt sich am Wasser, für welches die halbe Wellenlänge beim kleinen Erreger 4 cm beträgt, die Bügelverkürzung

(gemessen durch die Abstände der Bügelknotenlagen vom Wasseranfang, der nach den besprochenen Versuchen zum wahren Knoten gemacht wird) nur 5 mm beträgt. — Die Bügelverkürzung muss natürlich mit zunehmender Länge des Bügels zunehmen[1]).

Entsprechend diesen Versuchen lag also der Flüssigkeitsanfang (die Innenwand des Troges) um 8 mm hinter der ersten Bügelknotenlage[2]). Zu prüfen ist noch, ob nicht für die Drahtleitung, welche den Thontrog durchsetzt, der erste Knoten dadurch etwas verschoben wird, dass die Drähte, von Kork umgeben, die 1,1 cm dicke Wand des Troges durchsetzen, sowie vor den Korken kleine Metallplättchen (vergl. oben Seite 10) und 1 mm dicke Ebonitscheibchen tragen.

Ich habe dies direct an einem 50 cm langen, ebenfalls 1,1 cm Wandstärke haltenden Thontrog geprüft, für welchen die Drahtleitung genau ebenso befestigt war, wie für den kleineren Thontrog. Innerhalb des grossen, leeren Thontroges wurde die Lage des zweiten Knotens des Bügels B_2 ermittelt und mit der Lage dieses Knotens an der freien Luftleitung verglichen. Dadurch ergab sich, dass die Befestigungsart der Drähte eine kaum merkbare, jedenfalls unter 1,5 mm liegende Knotenverkürzung (Annäherung an B_1) hervorruft. Die hieraus fliessende Correction braucht daher nicht berücksichtigt zu werden.

5. Einfluss der Lage des Flüssigkeitsendes.

Bei Flüssigkeiten, welche, wie das Wasser, ein äusserst geringes Absorptionsvermögen und grosse Dielektricitätsconstante besitzen, kann zur Erzielung der grössten Genauigkeit der Messung die Lage des Flüssigkeitsendes von Bedeutung werden, wenn der Trog nicht genügend lang ist. Der Bügel B_2 reflectirt nämlich die elektrischen Wellen nicht total, sondern ein, allerdings sehr geringer, Bruchtheil ihrer Intensität gelangt über B_2 hinaus. Das ist von vornherein klar,

1) Theoretisch werden sich die Bügelverkürzungen wohl berechnen lassen. Nach den Versuchen von E. COHN und P. ZEEMANN (l. c.) sind bei grossen Wellenlängen die Bügelverkürzungen grösser als die halbe Bügellänge. Sie fanden 4,5 cm Verkürzung bei 7 cm Bügellänge und 4 bis 12 m Luftwellenlänge.

2) Wenn sich durch Veränderung am Erreger diese erste Bügelknotenlage etwas verschiebt, so kann sie durch geringes Verschieben des Bügels B_1 sofort wieder auf die ursprüngliche Lage gebracht werden. Dann ist aber für die neue Lage von B_1 wiederum $\frac{1}{2}\lambda$ zu bestimmen.

da die über den Bügel B_1 vom Erreger aus hinausgelangenden Wellen überhaupt erst das Leuchten der Vacuumröhre Z veranlassen. — Man kann sich davon auch direct überzeugen, indem man mit B_2 einen zweiten, hinter ihm liegenden Bügel B_3 starr verbindet, und nun die Knotenlagen von B_2 ermittelt. Wenn die Distanz $B_3 B_2$ so gewählt wird, dass das zwischen ihnen liegende Drahtsystem nahe in Resonanz mit den untersuchten Schwingungen steht, so können dadurch die Knotenlagen und auch die relativen Knotenabstände von B_2 etwas (eventuell 1 %) beeinflusst werden. — Bei grosser Dielektricitätsconstante wirkt nun aber das Flüssigkeitsende nahezu wie ein übergelegter Metallbügel; wenn daher B_2 in die Nähe des Flüssigkeitsendes geschoben wird, so können je nach seiner Lage zum Wellensystem die Knotenlagen von B_2 etwas verschieden beeinflusst werden[1]. — Experimentell muss dieser Einfluss dadurch geprüft werden, dass in der Nähe des Flüssigkeitsendes in zu variirenden Abständen[2] von ihm ein Bügel B_3 aufgelegt und dann die Knotenlagen von B_2 ermittelt werden.

Für die freie Luftleitung von 2 m Länge habe ich keinen Einfluss eines hinteren Bügels B_3 auf die Knotenlagen von B_2 finden können.

Im Folgenden theile ich die mit der Methode der Leuchtwirkungen gemachten Messungen mit.

Destillirtes Wasser.

Für destillirtes Wasser habe ich mit dem kleinen Erreger sehr viele Messungen vorgenommen, um die Frage nach etwa vorhandener Dispersion mit möglichster Schärfe beantworten zu können. Die Resultate stimmen unter einander sehr gut überein, ich will sie aber

1) Diese Correction ist auch bei den Methoden zu berücksichtigen, welche, wie die Cohn'sche, einen Metallbügel am Flüssigkeitsanfang fest liegen lassen, falls die zeitliche Dämpfung der Erregerwellen genügend klein und der Flüssigkeitstrog nicht sehr lang ist.

2) Diese Abstände sind womöglich im Intervall $\frac{1}{2}\lambda'$ zu variiren.

ausführlich später mittheilen, um dabei auch zugleich die Resultate, die ich für den Temperaturcoëfficienten des elektrischen Brechungsexponenten des Wassers erhalten habe, daran anschliessen zu können.

Hier theile ich nur zwei, mit den kurzen Wellen erhaltene Reihen mit, um die Präcision der Methode daran zeigen zu können. Zu den Beobachtungen ist ein grösserer Thontrog von 50 cm Länge, 34 cm Tiefe, 20 cm Breite, 1,1 cm Wandstärke benutzt worden. — Für die Wellen in Luft bedeuten die Zahlen die Entfernung der Knotenlagen des Bügels B_2 von der Hinterseite des Ebonithalters H_2 in Centimetern, für die Wellen in Wasser die Entfernungen der successiven Bäuche und Knoten vom Wasseranfang, welcher in einen wahren Knoten gelegt ist (vergl. oben Seite 32). Die erste Zahl entspricht einem Bauch.

Die Wellen in Luft sind sowohl vor, als nach den Wellen in Wasser beobachtet worden (vergl. oben Seite 13). — Für erstere sind die Zahlen die Mittel aus je 3 Beobachtungen (6 Einstellungen auf Übergang zu intensivem Leuchten, vergl. oben Seite 12), für letztere die Mittel aus 4 Beobachtungen (8 Einstellungen). Die Temperatur ϑ des Wassers wurde an zwei Thermometern abgelesen, von deren Gefässen sich das eine in Höhe der Drähte, das andere 1 cm unter der Wasseroberfläche befand. Die Temperatur schwankte nur um $\pm$ 0,2°. Die Leitfähigkeit des destillirten Wassers war verhältnissmässig hoch, nämlich $K = 21 \,.\, 10^{-10}$, weil es sich wohl durch einen Tag langes Stehen im (glasirten) Trog oder Aufnahme von Kohlensäure aus der Luft verunreinigt hatte. Indess wird hierdurch der elektrische Brechungsexponent sicher nicht merklich beeinflusst, wie mir die Übersicht der bei sehr verschiedenen K erhaltenen Resultate zeigt. — Die Distanz a der Drähte DD betrug 1,8 cm. — B_1 war ein grader Bügel (2 cm lang).

Kleiner Erreger. $a = 1{,}8$ cm, $B_1 = 2$ cm.

Wellen in Luft.

			Anfang:			
Beob.	8,4	46,2	83,7	121,1	158,2	
Ber.	8,6	46,1	83,5	121,0	158,4,	$\frac{1}{2}\lambda = 37{,}45$
			Schluss:			
Beob.	8,5	46,2	83,7	121,0	158,5	
Ber.	8,6	46,1	83,6	121,1	158,5,	$\frac{1}{2}\lambda = 37{,}48$

Wellen in Wasser, $\vartheta = 17°$.

Beob.	1,53	3,58	5,72	7,76	9,88	11,97	14,01	16,21	18,24	20,34
Ber.	51	60	69	78	88	97	06	15	24	34

$\frac{1}{2}\lambda' = 4,184.$ $n = \frac{37,46}{4,184} = \mathbf{8,953}.$ $n^2 = \mathbf{80,16}.$ $\varepsilon_H = 80,88.$

n bedeutet den elektrischen Brechungsexponenten, ε_H die Dielektricitätsconstante des Wassers nach Heerwagen[1]) für die Beobachtungstemperatur. Die Zahlen (Ber.) sind aus den Beobachtungen nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet worden. Sie schliessen sich sehr gut an die Beobachtungen an; nach den geringen Differenzen, welche zwischen Ber. und Beob. bestehen, ist sowohl λ als λ' jedenfalls auf 0,1 % genau bestimmt, n^2 daher auf mindestens 0,4 %.

In der That stimmen auch andere Bestimmungen von ε mit obiger Zahl meist innerhalb $\frac{1}{2}$ % überein.

Bei Vermeidung der unter 4. und 5. (Seite 29 und 32) angeführten Fehlerquellen muss also die Methode die Dielektricitätsconstante des Wassers auf $\frac{1}{2}$% genau bestimmen können.

Der erste Bauch ist nur 1,53 cm vom Flüssigkeitsanfang (wahrem Knoten) entfernt. Dies giebt 0,5 cm Bügelverkürzung (vergl. oben Seite 32).

Um zu zeigen, dass noch mehr Knoten und Bäuche der Wellen im Wasser gut zu bestimmen sind, theile ich noch eine Beobachtungsreihe mit, für welche sowohl bei der Luftleitung, wie im Wasser die Distanz der Drähte DD 1 cm betrug[2]). Entsprechend der kürzeren Länge von B_2 ist die Bügelverkürzung zu 4 mm in Luft angenommen, und der Wasseranfang in den hiernach zu berechnenden wahren Knoten verlegt. — Die Leitfähigkeit des destillirten Wassers war (für 13°) $15 \cdot 10^{-10}$.

Die Zahlen sind wiederum die Mittel aus 6, bezw. 8 Einstellungen.

Kleiner Erreger. $a = 1$ cm, $B_1 = 2$ cm.

Wellen in Luft.

	Anfang:				
Beob.	9,0	46,9	84,5	121,1	158,2
Ber.	9,4	46,7	83,9	121,2	158,4, $\frac{1}{2}\lambda = 37,25$

1) F. Heerwagen, Wied. Ann. 49, 1893, p. 272.

2) Die Drähte waren erst hinter dem zweiten Halter H_2 auf 1 cm Distanz

Schluss:

Beob.	9,1	16,6	84,2	120,7	157,9
Ber.	9,3	16,5	83,7	120,9	158,0, $\frac{1}{2}\lambda = 37{,}17$

Wellen in Wasser. $\vartheta = 11{,}7$.

Beob.	1,72	3,80	5,82	7,86	9,94	12,00	14,01	16,07	18,14	20,19
Ber.	72	77	82	87	93	98	03	08	14	19

Beob.	22,25	24,25	26,35	28,40	30,52	32,46
Ber.	24	29	34	40	45	50

$$\frac{1}{2}\lambda' = 4{,}104. \quad n = \frac{37{,}21}{4{,}104} = 9{,}067. \quad n^2 = 82{,}21. \quad \varepsilon_H = 82{,}80.$$

$$n_{17}^2 = 80{,}29.$$

n_{17} ist der aus dem beobachteten n^2 mit dem Heerwagen'schen Temperaturcoëfficienten berechnete Werth für $\vartheta = 17°$.

Für die Luftwellen stimmt hier nicht so gut Rechnung und Beobachtung überein, als vorhin, offenbar weil die bei der langen Luftleitung unvermeidlichen Fehler ihrer Parallelität sich für den Drahtabstand $a = 1$ cm bemerklicher machen, als für $a = 1{,}8$ cm (vergl. oben Seite 29). — Aus der sehr guten Übereinstimmung dieser Zahl für n_{17}^2 mit der vorhin bestimmten ersieht man, dass der unter 1. angeführte Fehler (wegen der endlichen Ausdehnung des Wassers) hier sich jedenfalls nicht geltend macht (vergl. oben Seite 26 Anm. 1).

Grosser Erreger. $a = 1{,}8$ cm, $B_1 = 2$ cm.

Wellen in Luft.

Anfang:	19,5	122,0	$\frac{1}{2}\lambda = 102{,}5$
Schluss:	19,5	122,5	$\frac{1}{2}\lambda = 103{,}0$

Wellen in Wasser. $\vartheta = 11{,}6$.

Beob.	5,57	11,23	16,94
Ber.	5,56	11,25	16,93, $\frac{1}{2}\lambda' = 11{,}37$

$$n = \frac{102{,}7}{11{,}37} = 9{,}03. \quad n^2 = 81{,}6. \quad \varepsilon_H = 82{,}8. \quad n_{17}^2 = 79{,}7.$$

Der Brechungsexponent ist bei diesem Versuch nicht als so genau bestimmt anzusehen, als vorhin mit den kurzen Wellen, da die

genähert, zwischen H_1 und H_2 war $a = 1{,}8$ cm. Deshalb konnte auch ein gerader Bügel B_1 von 2 cm Länge verwendet werden.

Zehnder'sche Röhre ohne die Benutzung der Resonanz und der kleine (31 cm lange) Thonkasten angewandt wurden, für welchen sich, bei diesen grossen Wellen, der unter 5. (Seite 32) angeführte Fehler bemerklich machen kann. — Ich werde bei anderer Gelegenheit über die mit Vermeidung dieses Fehlers zu erhaltenden zuverlässigsten Werthe n^2 für Wasser berichten; die hier mitgetheilten sind jedenfalls innerhalb 1% als richtig anzusehen.

Die erhaltenen Werthe für n^2 sind etwas kleiner als die Heerwagen'schen ε_H. Sie stimmen mit dem von Nernst[1]) erhaltenen Werthe, den allerdings Nernst nur als vorläufigen bezeichnet, $\varepsilon = 79{,}6$ bei $\vartheta = 18{,}1$, d. h. $\varepsilon_{17} = 80{,}0$ sehr nahe überein. Diese Versuche beziehen sich auf Wechselzahlen, die im Vergleich mit den hier benutzten als unendlich langsam zu betrachten sind.

Für elektrische Schwingungen, deren $\frac{1}{2}\lambda = 6$ m zu schätzen[2]) ist, hat Thwing[3]) $\varepsilon_{17} = 74{,}8$ erhalten. Ich glaube, dass die Zahl mit ziemlich grossem Fehler behaftet ist; ich habe wenigstens hinsichtlich des Temperaturcoëfficienten auch durchaus das Heerwagen'sche und Franke'sche[4]) Resultat erhalten, dass die Temperatur 4° keinen ausgezeichneten Punkt für n^2 bildet, während Thwing ein Maximum dafür beobachtet hat.

Nach den citirten Versuchen von Cohn und Zeemann, aus denen n^2 mit einer Sicherheit von mindestens $\frac{1}{3}$% folgt, ist zwischen den Wellenlängen:

$$\tfrac{1}{2}\lambda = 155 \text{ cm bis } \tfrac{1}{2}\lambda = 562 \text{ cm}: \ \varepsilon = 79{,}4.$$

Den von diesen Forschern ausgesprochenen Satz, dass bis zu $\frac{1}{2}\lambda = 155$ cm keine merkliche Dispersion des Wassers vorhanden ist, kann man daher hier bis zu $\frac{1}{2}\lambda = 37$ cm ausdehnen.

Bis zu Schwingungen der Schwingungszahl 400 Millionen in der Secunde ist die Dielektricitätsconstante (Quadrat des Brechungsexponenten) des Wassers innerhalb 1% constant.

---

1) W. Nernst, Ztsch. f. phys. Chem. 1894, **14**, p. 610.

2) Ich habe $\frac{1}{2}\lambda$ nach den von Thwing angegebenen Dimensionen seines Erregers berechnet.

3) Ch. B. Thwing, Ztsch. f. phys. Chem. 1894, **14**, p. 286.

4) A. Franke, Wied. Ann. **50**, 1893, p. 168.

Für das normale Verhalten des Wassers spricht auch das Fehlen jeglicher Absorption der hier benutzten Schwingungen[1]).

Glycerin.

Dasselbe war käuflich reines, spec. Gewicht 1,26 bei 15°. Leitfähigkeit $K = 2,8 \cdot 10^{-10}$. Bei den nun folgenden Versuchen ist stets der kleine Thontrog benutzt worden. Der Abstand a der Drähte DD betrug stets 1,8 cm.

Als Bügel B_1 sind zum Theil längere, gebogene Drahtstücke verwendet. Die Tabellen geben ihre Länge in Centimetern.

Kleiner Erreger. $B_1 = 4$ cm.

Luft:	6,5	44,3	$\frac{1}{2}\lambda = 37,8$
Flüssigkeit, $\vartheta = 15,2$:	2,99	6,74	$\frac{1}{2}\lambda' = 7,50$

In der Flüssigkeit ist die erste Zahl ein Bauch, die zweite ein Knoten. Es wurde direct auf maximale bezw. minimale Lichtentwickelung eingestellt, nicht auf Übergangspunkte der Leuchtintensität (vergl. oben Seite 12). Mehr Maxima bezw. Minima liessen sich nicht nachweisen. $\frac{1}{2}\lambda'$ ist die doppelte Differenz zwischen der Lage des Knotens und des Bauches. Dies würde eine Bügelverkürzung 0,76 cm im Glycerin ergeben, welche nach dem oben (Seite 35) am Wasser erhaltenen Resultat nicht unwahrscheinlich ist. Immerhin kann aber der Fehler in $\frac{1}{2}\lambda'$ wegen der sehr starken Dämpfung 0,2 cm sein.

Es wird sonach das Verhältniss der Wellenlängen:

$$n = \frac{37,8}{7,5} = 5,04; \; n^2 = 25,4.$$

n^2 ist mit einer Sicherheit von 5—6 % bestimmt anzusehen. Wegen der sehr starken Absorption muss zur theoretischen Verwendung von n^2 der Absorptionscoëfficient mit berücksichtigt werden (vergl. oben Seite 29). — Zur ungefähren Schätzung des letzteren kann dienen, dass eine wässrige Kupfersulfatlösung der Leitfähigkeit

1) Ich habe früher (P. Drude, Wied. Ann. **54**, 1895, p. 367) für Schwingungen der Wechselzahl $20 \cdot 10^6$ eine Absorption im Wasser zu bemerken geglaubt. Ich halte dieses Resultat jetzt nicht mehr für richtig, weiss aber vorläufig nicht die Ursache des damaligen Fehlers anzugeben. — Ich werde die früheren Versuche zur Entdeckung dieses Fehlers noch einmal wiederholen.

$K = 17000 \cdot 10^{-10}$ ebenso starke Dämpfung ergab, nämlich den ersten Knoten mit derselben Undeutlichkeit zeigte, wie Glycerin. Die Wellen im Glycerin starben also nach Durcheilen von $\frac{3}{4}\lambda$ ab (vergl. oben Seite 18).

Zum experimentellen Beweise, dass ein mangelhafter Contact des Bügels B_2 die starke Dämpfung im Glycerin nicht verursachen kann (vergl. oben Seite 6), wurde Glycerin in einen 5 cm weiten, 20 cm langen Glascylinder gegossen. Die Drähte DD setzten sich in eine rechtwinklig umgebogene, aus einem Stück bestehende Drahtleitung D' fort, und zwar war die Länge derselben dadurch variabel, dass sie längs der Drähte DD verschoben werden konnte, knapp durch übergeschobene kleine Metallringe gleitend, welche noch an Stellen lagen, die nicht vom Glycerin benetzt wurden. Die Oberfläche des Glycerins lag in einem wahren Knoten. Die Drahtleitung D' führte frei senkrecht in das Glycerin. Falls D' 1 cm tief in das Glycerin tauchte, leuchtete die Vacuumröhre Z noch gut. Zwischen 2 und 3 cm Eintauchtiefe zeigte Z minimale Lichtentwickelung, bei 5 cm Eintauchtiefe war das Leuchten wiederum merklich stärker, und blieb von dann an, bei beliebig tiefem Eintauchen von D', nahezu constant.

Grosser Erreger. $B_1 = 9$ cm.

Luft:		19,4	125,0	$\frac{1}{2}\lambda = 105,6$
Flüssigk.	$\vartheta = 13,3$:	7,1	15,7	$\frac{1}{2}\lambda' = 17,2$
	$\vartheta = 20,4$:	7,1	15,4	$\frac{1}{2}\lambda' = 16,6$

Für die Flüssigkeit bedeutet die erste Zahl einen Bauch, die zweite einen Knoten. Derselbe war deutlicher ausgebildet, als bei den Wellen des kleinen Erregers. Ein zweiter Bauch konnte aber ebenfalls nicht nachgewiesen werden. $\frac{1}{2}\lambda'$ (die doppelte Entfernung zwischen Bauch und Knoten) ergiebt eine Bügelverkürzung von 1,5 bezw. 1,2 cm. Diese ist wahrscheinlich etwas zu gross. Für 1,0 cm Bügelverkürzung würde $\frac{1}{2}\lambda'$ um 2—3 % kleiner nach den Beobachtungen zu berechnen sein.

Es wurde für zwei verschiedene Temperaturen beobachtet, um darüber sicher zu sein, dass die starke Dispersion des n nicht durch enorm grossen Temperaturcoëfficienten veranlasst sein kann. Derselbe scheint nach den Beobachtungen positiv zu sein, ist aber nicht mit

Schärfe daraus zu entnehmen[1]). Das Mittel zwischen beiden λ' kann von dem der Temperatur 15° entsprechenden Werthe jedenfalls nicht über 2—3 % verschieden sein. Es folgt daher für $\vartheta = 15°$:

$$n = \frac{105,6}{16,9} = 6,24\,;\; n^2 = 39,1.$$

n^2 ist als innerhalb 5—6 % bestimmt anzusehen.

Für einen kürzeren gebogenen Bügel $B_1 = 4$ cm, für den $\frac{1}{2}\lambda = 103,2$ war, wurde (sehr undeutlich) der erste Knoten bei 15,6 bestimmt. Dies würde bei 1 cm Bügelverkürzung $n^2 = 38,7$, — bei 0,8 cm Bügelverkürzung $n^2 = 39,7$ liefern.

Aus den Resultaten ergiebt sich eine sehr starke anomale Dispersion, n wächst bedeutend mit zunehmender Wellenlänge λ. — Auch für die Absorption ergiebt sich eine starke Änderung, nämlich Abnahme mit Wachsen von λ, da der erste Knoten bei den langen Wellen deutlicher ausgebildet war, als bei den kurzen. Wie durch directe Vergleichung gefunden wurde, zeigt für diese Wellen eine Kupfersulfatlösung der Leitfähigkeit $K = 3400 \cdot 10^{-10}$ ungefähr die gleiche Dämpfung wie Glycerin, eine Lösung der Leitfähigkeit $K = 4480 \cdot 10^{-10}$ dagegen deutlich eine stärkere Dämpfung.

Methylalkohol.

Derselbe war von Kahlbaum als acetonfrei bezogen. $K < 9 \cdot 10^{-10}$, spec. Gew. 0,796 bei 15°.

Kleiner Erreger. $B_1 = 3$ cm.

Wellen in Luft.

Anfang:

Beob.	6,90	44,12	81,41	118,58	
Ber.	6,90	44,13	81,37	118,60,	$\frac{1}{2}\lambda = 37,23$

Schluss:

Beob.	6,66	44,32	81,04	118,35	
Ber.	6,76	43,94	81,12	118,30,	$\frac{1}{2}\lambda = 37,18$

1) Aus den Beobachtungen würde eine Zunahme von n um $\frac{1}{2}$ %—1 % pro Grad folgen.

Wellen in Methylalkohol. $\vartheta = 16,5$ ($\pm$ 0,2).

I.	Beob.	2,65	5,86	9,18	12,26	15,59	18,80	21,96	25,20
	Ber.	66	89	11	33	55	77	99	21

$\frac{1}{2}\lambda' = 6,441.$

II.	Beob.	2,60	5,84	9,18	12,21	15,55	18,76	21,89	25,29
	Ber.	62	84	07	30	53	76	98	21

$\frac{1}{2}\lambda' = 6,456.$

III.	Beob.	2,72	5,85	9,07	12,30	15,55	18,80	22,13	25,31
	Ber.	64	87	11	35	59	82	06	30

$\frac{1}{2}\lambda' = 6,475.$

In der Reihe I ist das Flüssigkeitsende (bei 30,6) ohne Brücke B_3, in der Reihe II liegt dicht am Ende bei 30,4 ein Bügel B_3, d. h. bei 6 mm Bügelverkürzung (die aus den Versuchen folgt), auf einem Knoten. In der Reihe III liegt B_3 bei 27,2, d. h. auf einem Bauch. Die Reihen zeigen, dass durch die verschiedene Begrenzung der Flüssigkeit nur die beiden letzten beobachteten Bäuche bezw. Knoten beeinflusst werden. Wenn man aber, wie es in der Tabelle geschehen ist, trotzdem aus sämmtlichen Beobachtungen λ' nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet, so erhält man nur $\frac{1}{2}$ % maximale Differenz. Wenn man die beiden zuletzt beobachteten Knoten und Bäuche nicht mit zur Berechnung heranzieht, so ergiebt sich nur $\frac{1}{4}$ % Abweichung für die λ' der drei Reihen. Das Mittel derselben weicht von dem Mittel der in der Tabelle berechneten λ', nämlich

$$\frac{1}{2}\lambda' = 6,457$$

nur um 0,1 % ab. Jedenfalls kann man also den Brechungsexponenten n auf $\frac{1}{4}$ %, das Quadrat desselben auf $\frac{1}{2}$ % als sicher bestimmt ansehen. Diese Grössen sind:

$$n = \frac{37,21}{6,457} = 5,76,\ n^2 = 33,21.$$

Absorption war nicht zu bemerken.

Aethylalkohol.

Spec. Gewicht = 0,795 bei 15°, d. h. 99,5—99,6 procentig. $K < 2 . 10^{-10}$.

Kleiner Erreger. $B_1 = 3$ cm.

Wellen in Luft.

Anfang:

Beob.	6,83	44,25	81,55	118,85	
Ber.	6,86	44,21	81,55	118,89,	$\frac{1}{2}\lambda = 37{,}34$

Schluss:

Beob.	6,77	44,30	81,35	118,72	
Ber.	6,85	44,14	81,43	118,72,	$\frac{1}{2}\lambda = 37{,}29$

Wellen in Aethylalkohol. $\vartheta = 16{,}4$.

I.	Beob.	3,52	7,38	11,24	
	Ber.	3,52	7,38	11,24,	$\frac{1}{2}\lambda' = 7{,}72$
II.	Beob.	3,62	7,57	11,39	
	Ber.	3,64	7,53	11,41,	$\frac{1}{2}\lambda' = 7{,}77$
III.	Beob.	3,59	7,43	11,36	
	Ber.	3,58	7,46	11,35,	$\frac{1}{2}\lambda' = 7{,}77$
IV.	Beob.	3,48	7,41	11,29	
	Ber.	3,49	7,39	11,30,	$\frac{1}{2}\lambda' = 7{,}81$
V.	Beob.	3,52	7,39	11,32	
	Ber.	3,51	7,41	11,31,	$\frac{1}{2}\lambda' = 7{,}80$
VI.	Beob.	3,51	7,40	11,27	
	Ber.	3,51	7,39	11,27,	$\frac{1}{2}\lambda' = 7{,}78$

In diesen Reihen wurde beobachtet

in I: ohne hinteren Bügel B_3,
- II: mit B_3, mit B_2 im Abstand 7 cm fest verbunden (Seite 33),
- III: mit B_3, mit B_2 im Abstand 6 cm fest verbunden,
- IV: mit B_3, mit B_2 im Abstand 3 cm fest verbunden,
- V: ohne B_3,
- VI: *DD* von Kupferhülse in Abstand 3,5 cm umgeben (vergl. oben Seite 26).

Das Mittel von I und V, nämlich 7,76, unterscheidet sich von II, III und IV nur sehr wenig. Ein irgendwo, selbst dicht hinter

B_2 liegender Bügel B_3 übt also keinen deutlich erkennbaren Einfluss aus. Dies ist verständlich wegen der ziemlich beträchtlichen Dämpfung im Alkohol. Die oben Seite 32 unter 5. angeführte Fehlerquelle ist also nicht vorhanden. Ebenso nicht die Seite 23 unter 1. angeführte Fehlerquelle, nach dem Resultat der Reihe VI.

Die Zahlen sind durch Einstellung auf (nahe benachbarte) Übergangspunkte in der Leuchtintensität der Vacuumröhre gewonnen, zum Theil auch auf maximales, bezw. minimales Leuchten selbst[1]).

Das Mittel aus sämmtlichen Beobachtungen: $\frac{1}{2}\lambda' = 7,775$ ist als auf 0,2 % sicher anzusehen. Daher folgt n zu $\frac{1}{4}$ %, n^2 zu $\frac{1}{2}$ % Sicherheit:

$$n = \frac{37,32}{7,775} = 4,80\,,\; n^2 = 23,04.$$

Absorption ist ziemlich beträchtlich, da der zweite Knoten sich nicht mehr einstellbar, nur so eben andeutungsweise, kennzeichnete. Nach der oben Seite 17 mitgetheilten Tabelle verhält sich Aethylalkohol bei diesen Wellen etwa wie Kupfersulfatlösung der Leitfähigkeit $K = 7500 \,.\, 10^{-10}$.

Grosser Erreger.

Wellen in Luft. $B_1 = 4$ cm.

Anfang:	14,2	113,0	$\frac{1}{2}\lambda = 98,8$
Schluss:	14,0	112,7	$\frac{1}{2}\lambda = 98,7$

$B_1 = 9$ cm.

Anfang:	14,1	115,2	$\frac{1}{2}\lambda = 101,1$
Schluss:	13,9	114,8	$\frac{1}{2}\lambda = 100,9$

Wellen in Aethylalkohol. $\vartheta = 18,4$.

I. Beob.	9,32	19,56	$\frac{1}{2}\lambda' = 20,48$
II. Beob.	9,37	19,40	$\frac{1}{2}\lambda' = 20,06$
III. Beob.	9,13	19,27	$\frac{1}{2}\lambda' = 20,28$

Die Reihen I und II wurden bei $B_1 = 4$ cm, Reihe III bei $B_1 =$ 9 cm angestellt. Bei Reihe II liegt am Flüssigkeitsende (30,6) ein Bügel B_3, bei I und III nicht. Die Lage des Endes der Flüssigkeit

1) Letztere Lagen unterschieden sich innerhalb der Fehler der einzelnen Beobachtung nicht von dem Mittel der Übergangslagen.

kann hier kaum Einfluss gewinnen, da es nahezu in einen Bauch fällt, also Schwingungen von etwas Intensität hinter B_2 nicht zu Stande kommen können. Die Differenz zwischen I und II schiebe ich daher auf Beobachtungsfehler, und nach der Reihe III, für welche $\frac{1}{2}\lambda' = 20,28$ ist, ist es auch sehr wahrscheinlich, dass die Reihe I ein zu grosses $\frac{1}{2}\lambda'$ ergeben hat, da für diese die Luftwellen um 2 % kleiner sind, als für Reihe III.

Es würde daher aus Reihe I und II folgen:

$$n = \frac{98,75}{20,27} = 4,87\,, \quad n^2 = 23,74,$$

aus Reihe III:

$$n = \frac{101,0}{20,28} = 4,98\,, \quad n^2 = 24,80.$$

Das Mittel ist:

$$\boldsymbol{n = 4,92\,, \quad n^2 = 24,3\,.}$$

n^2 kann auf 2 % als sicher angesehen werden. Dass die Zahlen hier weniger genau bestimmt sind, liegt nicht an der Absorption, sondern an der Kürze des Thonkastens. Deshalb war es nicht mehr möglich, den zweiten Bauch einzustellen[1]), auch konnte die Absorption nicht festgestellt werden. Jedenfalls war sie noch kleiner, als bei den kurzen Wellen, da bei Lage von B_2 am Kastenende (30,6) die Vacuumröhre vollkommen dunkel und dieser zweite Bauch besser ausgebildet war, als bei den kurzen Wellen.

Die Beobachtungen ergeben eine deutliche, über die Beobachtungsfehler hinausfallende anomale Dispersion[2]), n^2 wird für längere Wellen grösser, die Absorption kleiner. Die Beobachtungen beziehen sich allerdings auf zwei verschiedene Temperaturen, $\vartheta = 16,4$ und 18,4.

1) Zur genauen Einstellung muss nämlich B_2 auch ein Stück über den Bauch (29,4) herausgleiten können. Dies verhinderten aber schon die hinten an die Kupferdrähte angelötheten dickeren Messingdrähte (vgl. oben pag. 10).

2) Ich habe früher (Wied. Ann. **54**, 1895, p. 364) für sehr lange Wellen ($\frac{1}{2}\lambda = 700$ cm bis $\frac{1}{2}\lambda = 1000$ cm) eine geringe (1,7 % Änderung) normale Dispersion des Aethylalkohols gefunden. Dies würde dem hier gefundenen Resultat nicht widerstreiten, da auch nach der Theorie die Dispersion vor dem Eintreten in Absorptionsgebiete normal ist. Indess halte ich es doch für wünschenswerth, da es sich nur um ganz kleine Differenzen handelt, dass noch nach anderen Methoden, die genügende Sicherheit verbürgen können, die Dispersion für sehr lange Wellen untersucht wird.

Indess kann dies jedenfalls die Differenz des n^2 nicht erklären. Nach Nernst[1]) ist der Temperaturcoefficient von n^2 (= Dielektricitätsconstante) negativ (0,4 % pro Grad). Auf 16,4° bezogen würde also n^2 für die langen Wellen einen Werth haben, der noch grösser als 24,3 (nämlich 24,5) wäre, d. h. die Differenz gegen den Werth $n^2 = 23,04$ für die kurzen Wellen wäre noch vergrössert.

Amylalkohol.

Von Kahlbaum bezogen. Spec. Gew. 0,812 bei 16° C. $K < 1,6 . 10^{-10}$.

Kleiner Erreger. $B_1 = 4$ cm.

Wellen in Luft.

Anfang:

Beob.	6,72	44,72	82,60	120,45	
Ber.	6,76	44,67	82,57	120,48,	$\frac{1}{2}\lambda = 37,91$

Schluss:

Beob.	6,75	44,70	82,60	120,33	
Ber.	6,80	44,66	82,53	120,39,	$\frac{1}{2}\lambda = 37,86$

Wellen in Amylalkohol. $\vartheta = 18,5$.

7,28 15,85

$\frac{1}{2}\lambda'$ I: 17,14, II: 16,74, III: 16,16.

$\frac{1}{2}\lambda'$ I bedeutet die doppelte Differenz zwischen der Lage des beobachteten Bauches und Knotens. Dann ergiebt sich aber $\frac{1}{2}\lambda' - 7,28 = 1,29$ cm Bügelverkürzung. Dies ist unwahrscheinlich gross, vielmehr ist 0,8 cm Bügelverkürzung bei diesen langen Wellen wahrscheinlich (das ist derselbe Werth wie für die Luftwellen, cf. oben Seite 31). Berechnet man mit Zugrundelegung dieses Werthes die Beobachtungen nach der Methode der kleinsten Quadrate, so entsteht $\frac{1}{2}\lambda'$ II.

1) W. Nernst, l. c. p. 661. — Der von Nernst mit sehr langsamen Wechselzahlen erhaltene Temperaturcoefficient ist jedenfalls dem Sinne nach hier anzuwenden, auch wohl ziemlich genau quantitativ, da zwischen sehr langsamen Wechselzahlen und den hier benutzten langen Wellen die Dispersion nur gering ist (vgl. weiter unten).

Indess giebt auch diese Berechnung nicht das wahrscheinlichste Resultat, weil dann die Differenz zwischen dem beobachteten und berechneten Bauch — 0,2 cm wird, was unwahrscheinlich ist, da dieser Bauch als Mittel von 6 Beobachtungen (12 Einstellungen auf Übergangspunkte, die 4—6 cm von einander entfernt liegen) ziemlich sicher bestimmt ist, während der Knoten undeutlich und unsicher ist.

$\frac{1}{2}\lambda'$ III ist die doppelte Entfernung des Bauches inclusive 8 mm Bügelverkürzung vom Wasseranfang, d. h.

$$\tfrac{1}{2}\lambda' \text{ III} = 2(7,28 + 0,8),$$

und dieser Werth ist der wahrscheinlichste. Fehlerquelle 5 kann sich bei der starken Absorption nicht bemerklich machen.

Es folgt

$$n = \frac{37,9}{16,2} = \mathbf{2,34}, \ n^2 = \mathbf{5,49}.$$

Bei Benutzung von $\frac{1}{2}\lambda'$ I würde $n^2 = 4,9$ folgen. Jedenfalls ist daher n^2 nicht wesentlich grösser als 5,5 und der Fehler kann jedenfalls nicht grösser als 10 % sein. Die Zahl 5,5 kann aber wohl als auf 4 % sicher angesehen werden, da die Unsicherheit vom Bauch höchstens 1 mm ist.

Die Absorption ist sehr stark, noch etwas stärker als bei Glycerin für diese Wellen. $K = 18000 \cdot 10^{-10}$ ist etwa die Leitfähigkeit einer für diese Wellen sich gleich verhaltenden Kupfersulfatlösung.

Grosser Erreger. $B_1 = 9$ cm.

Wellen in Luft vgl. beim Aethylalkohol.

Wellen in Amylalkohol. $\vartheta = 17,3$.

1\. Bauch 14,50, $\frac{1}{2}\lambda' = 30,6$.

Der erste Knoten war wegen der Kürze des Thonkastens nicht einzustellen. Die Unsicherheit der Einstellung 14,5 ist höchstens 2 mm, daher folgt mit einer Sicherheit von 1,5 % bezw. 3 %:

$$n = \frac{101}{30,6} = \mathbf{3,03}, \ n^2 = \mathbf{10,9}.$$

Die Beobachtungen ergeben sehr starke anomale Dispersion. Nimmt man nach Nernst den Temperaturcoefficienten

negativ zu —0,7% pro Grad, so folgt $n^2 = 10,8$ für $\vartheta = 18,5$. Für die kurzen Wellen ist also n^2 nahezu nur halb so gross.

Essigsäure.

Eisessig, von Kahlbaum bezogen.

$K < 1,7 \cdot 10^{-10}$. Spec. Gewicht 1,055 bei 15°,5.

Kleiner Erreger.

Wellen in Luft. $B_1 = 2$ cm.

Beob.	6,76	43,88	80,55	118,02	
Ber.	6,74	43,78	80,82	117,87,	$\frac{1}{2}\lambda = 37,05$

$B_1 = 3$ cm.

Beob.	6,66	43,85	81,45	118,30	
Ber.	6,69	43,94	81,19	118,44,	$\frac{1}{2}\lambda = 37,25$

Wellen in Essigsäure. $\vartheta = 19,5$.

$B_1 = 2$ cm	7,35	14,03	
$B_1 = 3$ cm	6,95	13,99,	21,76

Der erste, bezw. zweite Bauch ist als Mittel der Einstellungen auf Einsetzpunkte des Leuchtens gewonnen worden; diese hatten einen Abstand h von 8—11 cm. Der Knoten ist das Mittel der Einstellungen auf Übergangspunkte zum maximalen Leuchten, diese hatten nur 2 cm Abstand. Bei diesem geringen Abstand h ist die Lage des Knotens als richtig bestimmt anzusehen, die Lage der Bäuche wegen des grossen h dagegen nicht. Denn das Mittel von Einsetzpunkten, die durch einen Bauch von einander entfernt sind, wird bei Dämpfung der Wellen um so grösser gefunden, je grösser ihr Abstand h ist. Man kann dies gut aus der Curve der Tafel I entnehmen, welche dem $K = 4730$ entspricht, und welche noch eine geringere Dämpfung als Essigsäure hat, da nach der Curve der zweite Knoten noch ausgebildet ist, für die Essigsäure dagegen nicht. Bestimmt man nach dieser Curve das Mittel von Punkten gleicher Intensität (von gleichem y), welche vom 1. bezw. 2. Bauch, die bei 4,0 bezw. 6,0 liegen, getrennt werden, so erhält man, falls y die Ordinaten der Curve, x ihre Abscissen bedeuten:

y	x_1	x_2	$\frac{x_1+x_2}{2}$	x_2-x_1	x_3	x_4	$\frac{x_3+x_4}{2}$	x_4-x_3
0,7	2,0	2,0	2,0	0,00	—	—	—	—
0,8	1,72	2,32	2,02	0,60	—	—	—	—
0,9	1,61	2,45	2,03	0,84	—	—	—	—
1,0	1,53	2,60	2,06	1,07	—	—	—	—
1,1	1,46	2,76	2,11	1,30	—	—	—	—
1,2	1,41	2,95	2,18	1,54	5,50	6,50	6,00	1,00
1,3	1,32	3,16	2,24	1,84	5,00	7,50	6,25	2,50
1,4	1,22	3,50	2,36	2,28	4,58	8,30	6,44	3,72

Man sieht, dass $\frac{x_1+x_2}{2}$ mit x_2-x_1 zunimmt, ebenso $\frac{x_3+x_4}{2}$ mit x_4-x_3; dagegen ist die Distanz der Mittel $\frac{x_3+x_4}{2}-\frac{x_1+x_2}{2}$ ziemlich constant 4,0, falls nicht x_2-x_1 grösser ist, als x_4-x_3. Der Knoten (4,0) muss also näher zum vorderen Bauch $\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$, als zum hinteren Bauch $\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)$ liegen, wenn letztere als Mittel weit entfernter Einsetzpunkte gewonnen werden.

Dies ist nun in der That bei der Essigsäure der Fall, denn für $B_1 = 3$ cm liegt der 1. Bauch um 7,05 vor dem 1. Knoten, der 2. Bauch dagegen um 7,77 dahinter. Es war nun:

	x_1	x_2	x_3	x_4
für $B_1 = 3$ cm:	2,92	10,98	16,80	26,72
für $B_1 = 2$ cm:	1,93	12,77		

Daher ist für $B_1 = 3$ cm $x_2-x_1 = 8,06$ nicht grösser als $x_4-x_3 = 9,92$. Folglich muss die Differenz der Bäuche, nämlich 14,81, nahezu die halbe Wellenlänge ergeben. Andrerseits ist der 1. Bauch für $B_1 = 2$ cm grösser bestimmt, als für $B_1 = 3$ cm, weil im ersteren Falle (wegen der geringeren Intensität der Wellen) $x_2-x_1 = 10,84$ grösser war, als im zweiten Falle $(x_2-x_1 = 8,08)$[1].

[1]) Derartige Complicationen können gerade bei Flüssigkeiten mit mässiger Absorption eintreten, bei solchen mit sehr starker nicht, da dann im Bauch, oder nahe dabei, die Röhre Z leuchtet und auf das Minimum entweder direct eingestellt werden kann, oder auf nahe benachbarte Einsetzpunkte. — Beim Amylalkohol war daher diese Complication nicht vorhanden, wie auch aus den mitgetheilten Zahlen hervorgeht, da der 1. Bauch (7,28) nicht über $\frac{1}{4}\lambda'$ vom 0ten Knoten (— 0,8) entfernt liegt.

Die Knoten sind für $B_1 = 2$ cm und $B_1 = 3$ cm ziemlich übereinstimmend gefunden, obgleich die Wellenlängen in Luft um $\frac{1}{2}$% verschieden sind. Dieser hiervon herrührende Unterschied versteckt sich in den Beobachtungsfehlern, es ist daher das Mittel der Knoten, nämlich 14,01, als wahrscheinlichster Werth für die mittlere halbe Wellenlänge in Luft 37,15 anzusehen. Bei 8 mm Bügelverkürzung fällt der sich dann ergebende Werth $\frac{1}{2}\lambda' = 14,81$ (zufällig) genau zusammen mit dem oben aus der Distanz der Bäuche sich ergebenden.

Die Fehlerquelle 5 macht sich bei der starken Absorption nicht bemerkbar. Es sind auch direct die Einstellungen vom Vorhandensein eines hinteren Bügels B_3 unabhängig gefunden worden. — Es folgt

$$n = \frac{37,15}{14,81} = 2,51, \; n^2 = 6,29.$$

n^2 ist mit 1% Sicherheit bestimmt anzusehen.

Die Absorption ist ziemlich bedeutend; ein zweiter Knoten war nicht einstellbar.

Nach der oben Seite 17 mitgetheilten Tabelle verhält sich eine Salzlösung der Leitfähigkeit $K = 8000 \cdot 10^{-10}$ etwa gleich dämpfend.

Grosser Erreger. $B_1 = 4$ cm und 9 cm.

Wellen in Luft vgl. beim Aethylalkohol.

Wellen in Essigsäure. $\vartheta = 17,0$.

$B_1 = 4$ cm: 18,50, $h = 21$ cm
$B_1 = 9$ cm: 18,55, $h = 8$ -
19,42, $h = 12$ -

Die Zahlen geben den Abstand des 1. Bauches vom Flüssigkeitsanfang. Der 1. Knoten war wegen der Kürze des Troges nicht zu erreichen. h bedeutet die Distanz der Einstellpunkte, deren Mittel als Bauch bezeichnet ist. — Wie wir aber nach den vorigen Erörterungen wissen, liegt dies Mittel hinter dem eigentlichen Bauch (der $h = 0$ entspricht). In der That ist bei $B_1 = 9$ cm das Mittel der Einstellungen mit wachsendem h grösser geworden. — Auch die erste Zahl (18,50) ist zu gross, da für die 2% kleineren Wellen des $B_1 = 4$ cm der erste Bauch von 18,55 auf 18,16 sich hätte nähern müssen.

Da der 1. Knoten nicht bestimmt ist, so kann man daher aus

diesen Beobachtungen mit Sicherheit nur untere Grenzwerthe des n angeben. Es ist (Bügelverkürzung zu 8 mm) angenommen:

$$\tfrac{1}{4}\lambda' < 18{,}55 + 0{,}8 = 19{,}35,$$

$$\text{d. h. } n > \frac{101}{38{,}7} = 2{,}61,\ n^2 > 6{,}81.$$

Näherungsweise kann man $\frac{1}{2}\lambda'$ dadurch berechnen, dass man die Resultate der oben auf Seite 48 berechneten Curve verwerthet, welche ungefähr gleiche Dämpfung hat, wie Essigsäure bei diesen Wellen. Die Distanz $h = 8$ cm der Einstellpunkte macht etwa den 4,7ten Theil der halben Wellenlänge in Essigsäure aus. Obige Curve ergiebt eine halbe Wellenlänge 4 cm, der 4,7te Theil ist 0,85 cm. Obige Tabelle ergiebt dafür 0,3 mm (wahrscheinlicher ist 0,4 mm) Verschiebung des Mittels $\frac{x_1 + x_2}{2}$ d. h. 2 % des Bauchabstandes. Folglich müsste die oben für die Essigsäure benutzte Zahl $\frac{1}{4}\lambda' =$ 19,35 um 2 %, d. h. auf 19,0 zu verkleinern sein, um den wahren Werth von $\frac{1}{4}\lambda'$ zu finden. Dies ergiebt

$$n = \frac{101}{38{,}0} = 2{,}66,\ n^2 = 7{,}07.$$

Aus den Beobachtungen ist mit Sicherheit eine, allerdings nicht sehr bedeutende, anomale Dispersion der Essigsäure zu entnehmen, da für die kurzen Wellen $n^2 = 6{,}29$ ($\pm$ 1 %), für die langen $n^2 > 6{,}8$ gefunden ist. — Auch die Absorption ist anomal, der Leitfähigkeit K der Essigsäure nicht entfernt entsprechend.

Anilin.

Von KAHLBAUM bezogen, $K < 1{,}7 \cdot 10^{-10}$. Spec. Gewicht 1,03 bei 15°.

Kleiner Erreger. $B_1 = 2$ cm.

Wellen in Luft.

Anfang	6,78	43,76	80,77	117,99	
Ber.	6,73	43,79	80,86	117,92,	$\frac{1}{2}\lambda = 37{,}06$
Schluss	6,70	43,81	80,78	117,46	
Ber.	6,80	43,73	80,65	117,57,	$\frac{1}{2}\lambda = 36{,}93$

Wellen in Anilin. $\vartheta = 13,9$.

I. Beob.	6,77	13,41	20,59	27,22,	$\frac{1}{2}\lambda' = 13,81$
II. Beob.	6,60	13,33	20,55	27,18,	$\frac{1}{2}\lambda' = 13,85$
h	9	2	10	2	

Die Reihe I ist angestellt mit hinterem Bügel B_3, Reihe II ohne hinteren Bügel B_3. Beide Reihen geben nahezu dasselbe $\frac{1}{2}\lambda'$. Letzteres ist berechnet als Differenz der Knotenlagen. Diese sind als richtig bestimmt anzusehen, da für sie die Differenz h der Einstellungspunkte nur klein ist. Für die Bäuche macht sich bei dem beträchtlichen Werthe von h das oben bei der Essigsäure besprochene Verhalten bemerklich, dass dieselben etwas zu gross bestimmt erscheinen. Indess tritt dies hier bei der geringeren Dämpfung im Anilin nicht so stark hervor. Die Differenz der Bäuche stimmt nahezu (in der Reihe I bis auf 0,01, in der Reihe II bis auf 0,10) mit der Differenz der Knoten überein. — Der Mittelwerth 13,83 ist bis auf 0,4 % als sicher anzusehen.

Es folgt

$$n = \frac{37,0}{13,83} = 2,67, \; n^2 = 7,14.$$

n^2 ist auf 1 % sicher.

Die Absorption ist im Anilin gering, aber deutlich bemerkbar anomal, d. h. grösser, als es seiner Leitfähigkeit K entspricht. Der zweite Knoten hat etwa dieselbe Deutlichkeit, wie der fünfte bis sechste Knoten im Wasser; dies zeigt Anomalie, da im Wasser die Deutlichkeit des sechsten Knotens vom K unabhängig ist innerhalb gewisser Grenzen, die die Leitfähigkeit des Anilins um mehr als das hundertfache übertreffen können.

Aethyläther.

Von Kahlbaum als wasserfrei bezogen. $K < 1,7 \cdot 10^{-10}$. Spec. Gew. 0,722 bei 12°.

Kleiner Erreger. $B_1 = 2$ cm.

Wellen in Luft vgl. beim Anilin.

Wellen im Äther. $\vartheta = 17,8$.

Wegen der Kürze des Kastens konnte nur der erste Bauch und ein Knoten ermittelt werden. Letzterer folgte:

ohne hintere Brücke B_3: 16,91
mit hinterer - - : 16,71.

Bei 8 mm Bügelverkürzung ergiebt sich hieraus $\frac{1}{2}\lambda' = 17,71$ bezw. 17,51. Der erste Bauch wurde (mit hinterer Brücke B_3) bei Abstand $h = 13$ cm der Einstellungspunkte zu 8,31 gefunden. Da dieses etwas näher als $\frac{1}{4}\lambda'$ zum ersten Knoten liegt, so ist (vgl. bei Essigsäure) das Vorhandensein einer, allerdings nur sehr geringen Dämpfung dadurch wahrscheinlich gemacht. Direct konnte letztere wegen der Kürze des Thonkastens (er hätte mindestens doppelt so lang sein müssen) nicht bestimmt werden.

Die beiden Einstellungen mit und ohne B_3 unterscheiden sich um 1,1% von einander. Die Fehlerquelle 5. kann daher für den Mittelwerth

$$\frac{1}{2}\lambda' = 16,81$$

noch einen Einfluss von vielleicht $\frac{1}{2}$% besitzen.

Es wird daher n^2 nur auf 1% sicher.

$$n = \frac{37,0}{17.6} = 2,10, \; n^2 = 4,42.$$

Benzol.

Von KAHLBAUM als thiophenfrei bezogen. $K < 1,7 \cdot 10^{-10}$. Spec. Gew. 0,885 bei 14°.

Kleiner Erreger. $B_1 = 2$ cm.

Wellen in Luft vgl. beim Anilin.

Wellen in Benzol. $\vartheta = 19,4$.

I.	erster Knoten	23,84
II.	-	23,58
III.	-	23,75
IV.	-	23,75

Bei I und III liegt keine Brücke B_3 hinter B_2, bei II ist 1,2 cm vor dem Benzolende (bei 30,6) ein Bügel B_3 aufgelegt, bei IV sind

die aus dem Kasten ragenden Enden der Drahtleitung an der Aussenwand des Troges (hinter dem Benzolende) mit B_3 überbrückt. — Die Beobachtung II scheint durch die Nähe des B_2 etwas zu klein ausgefallen zu sein, das Mittel aus I, III, IV 23,78 halte ich für wahrscheinlicher, als das Mittel 23,73 aller Beobachtungen. Die Differenz ist aber unerheblich in Anbetracht der Thatsache, dass die Bügelverkürzung einen Fehler von 0,5 mm wohl enthalten kann. Es folgt, die Bügelverkürzung zu 8 mm angenommen:

$$n = \frac{37,0}{24,6} = 1,504, \quad n^2 = 2,262.$$

n^2 ist als auf 1% sicher anzusehen.

Absorption war nicht bemerkbar, wenigstens nicht für den ersten Knoten, der allein in Betracht gezogen werden konnte.

Zusammenfassung.

Im Folgenden stelle ich die hier gewonnenen Resultate zusammen und vergleiche sie mit den Werthen der Dielektricitätconstante, welche andere Beobachter mit langsameren Wechselzahlen erhalten haben. Ich benutze dazu die Beobachtungen von Heerwagen[1]), Franke[2]), Nernst[3]), Tereschin[4]), Thwing[5]), Cohn und Zeemann[6]). Erstere vier Beobachter haben Wechselzahlen benutzt, die als sehr klein zu bezeichnen sind (N sehr klein), bei Thwing war die Wechselzahl, wie ich aus den Dimensionen seines Erregers berechnet habe, etwa $N = 25 . 10^6$ sec^{-1} ($\lambda = 12$ m), bei Cohn und Zeemann lag N zwischen $27 . 10^6$ und $100 . 10^6$. Ihre Beobachtungen, die sich nur auf Wasser beziehen, sind zum Ersatz der (wahrscheinlich unrichtigen) Zahl von Thwing benutzt. Für meine Versuche ist N berechnet aus $N = 3 . 10^{10} : \lambda$.

1) F. Heerwagen, Wied. Ann. **49**, 1893, p. 272.
2) A. Franke, Wied. Ann. **50**, 1893, p. 163.
3) W. Nernst, Ztschf. f. phys. Chem. **14**, 1894, p. 622.
4) S. Tereschin, Wied. Ann. **36**, 1889, p. 792.
5) Ch. B. Thwing, Ztsch. f. phys. Chem. **14**, 1894, p. 286.
6) E. Cohn u. P. Zeemann, Akad. d. Wiss. zu Amsterdam, Spt. 1895.

Die Zahlen der anderen Beobachter sind auf die Temperatur meiner Beobachtungen, die in der mit ϑ überschriebenen Colonne angegeben ist, umgerechnet für folgende Flüssigkeiten unter Annahme folgender Temperaturcoefficienten:

Wasser	$d\varepsilon = -0{,}45\%$	pro Grad
Aethylalkohol	- $-0{,}4\%$	-
Amylalkohol	- $-0{,}7\%$	-
Aether	- $-0{,}3\%$	-
Benzol	- $-0{,}09\%$	-
Anilin	- $-0{,}5\%$	-

Den Temperaturcoefficienten für Wasser (den ich auch für kurze Wellen sehr gut bestätigt gefunden habe) entnehme ich der Arbeit von HEERWAGEN, die anderen Temperaturcoefficienten der Arbeit von NERNST. — Für Glycerin war eine Umrechnung nicht nöthig, da auch THWING bei 15° beobachtet hat, für Essigsäure und Methylalkohol habe ich keine Reduction vorgenommen, da bisher keine Messungen über den Temperaturcoefficienten vorliegen. Die in Klammern dabei gesetzten Zahlen beziehen sich auf die Beobachtungstemperatur bei diesen Flüssigkeiten. Die Indices der in der Colonne »N klein« angeführten Zahlen beziehen sich auf die Beobachter HEERWAGEN: 1), FRANKE: 2), NERNST: 3), TERESCHIN: 4), die Thwing'schen Zahlen sind (mit Ausnahme der Zahl für Wasser, cf. oben) in der Colonne »$N = 25 \,.\, 10^6$« enthalten. — Die dritte Colonne enthält das Molekulargewicht M, die vierte das Quadrat des optischen Brechnungsexponenten für rothes Licht. In der Colonne »$N = 150 \,.\, 10^6$« bezw. »$N = 400 \,.\, 10^6$« sind meine Beobachtungen angeführt, und zwar das Quadrat des Verhältnisses der Wellenlängen in Luft und Flüssigkeit. In den Colonnen »Abs.« (Absorption) ist entweder die Leitfähigkeit K einer sich gleich verhaltenden Kupfersulfatlösung, multiplicirt mit 10^{10}, angegeben, oder, falls keine genaueren Bestimmungen vorliegen, durch ein — das Fehlen, durch + das Vorhandensein von Absorption gekennzeichnet.

Dispersions-Tabelle.

Substanz	Formel	M	n^2 opt.	N klein	N $25 . 10^6$	$N = 150 . 10^6$		$N = 400 . 10^6$		ϑ
						n^2	Abs.	n^2	Abs.	
Wasser	H_2O	18	1,8	80,9[1] 80,0[3]	79,4	80,2	—	79,7	—	17
Glycerin	$C_3H_8O_3$	92	2,1		56,2	39,1	3400	25,4	17000	15
Methylalkoh.	CH_4O	32	1,8	32,7[4] (14)	34,0 (15)			33,2	—	16
Aethylalkoh.	C_2H_6O	46	1,8	25,9[3] 25,5[4]	24,8	24,4	+	23,0	7500	17
Amylalkohol	$C_5H_{12}O$	88	1,9	16,05[3] 15,4[4]	14,3	10,8	+	5,51	18000	18
Essigsäure	$C_2H_4O_2$	60	1,9	9,7[2] (18)	10,3 (15)	7,07 (17)	+	6,29 (19)	8000	17 bis 19
Anilin	C_6H_7N	93	2,5	7,38[3] 7,5[4]				7,14	+	14
Aethyläther	$C_4H_{10}O$	74	1,9	4,25[3]				4,42	+ (?)	18
Benzol	C_6H_6	78	2,23	2,251[3]				2,262	—	19

Diese Zusammenstellung bestätigt die von mir gemachten Beobachtungen insofern, als für alle diejenigen Substanzen, für welche deutlich anomale Absorption und durch Vergleich des mit dem kleinen und dem grossen Erreger gefundenen Resultates deutlich anomale Dispersion nachgewiesen ist, das ist **Glycerin, Aethylalkohol, Amylalkohol, Essigsäure**, die Dielektricitätsconstante für kleinere Schwingungszahlen N zum Theil wesentlich grösser ist, als das Quadrat des Wellenlängenverhältnisses bei den von mir benutzten Schwingungen. Die Substanzen sind in der Reihenfolge geordnet, wie sie der Differenz:

Dielektricitätsconstante ε gegen n^2 optisch

entspricht. Im Allgemeinen nimmt in derselben Reihenfolge die Stärke der anomalen Dispersion ab, indess macht sich ein bedeutender Einfluss des Molekulargewichtes geltend, wie man an der fehlenden Dispersion im Wasser und Methylalkohol, an der starken beim Glycerin und Amylalkohol erkennt. Auch beim Aethylalkohol ist die

für kleines N erhaltene Dielektricitätsconstante deutlich grösser, als n^2 für schnelle Schwingungen. Es ist zwar zu berücksichtigen, dass die Beobachtungen mit Präparaten angestellt sein können, die etwas verschieden sind von den von mir benutzten. So ist der von NERNST angewandte Aethylalkohol höher concentrirt (99,8 %), als meiner (99,5 %). Indess wächst die Dielektricitätsconstante durch Wassergehalt, die Differenz meines n^2 beim Aethylalkohol gegen den NERNSTschen Werth[1]) wird also noch vergrössert, wenn man die NERNSTsche Zahl auf einen 99,5 %-Alkohol reduciren würde. — Die Verschiedenheit des n^2 und der Dielektricitätsconstante bei den übrigen anomalen Substanzen ist aber so gross, dass sie nicht entfernt durch Verunreinigungen erklärt werden kann.

Für Wasser, Methylalkohol, Benzol ist keine Dispersion nachgewiesen. Für letztere Substanz war sie auch nicht zu erwarten, weil n^2 optisch nahezu mit der Dielektricitätsconstante übereinstimmt.

Für Äther scheint bei den kürzesten Wellen etwas Absorption (vergl. oben Seite 52) vorhanden zu sein. Anomale Dispersion ergiebt sich aber aus der Zusammenstellung nicht; ob eine sehr geringe normale Dispersion vorhanden ist, kann man mit Sicherheit nach den bisherigen Resultaten wohl noch kaum sagen. — Beim Anilin scheint eine geringe anomale Dispersion vorhanden zu sein, wofür besonders die Andeutung anomaler Absorption für kleine Wellen spricht; auch die Verschiedenheit des n^2 und ε scheint grösser zu sein, als sie eventuellen Verunreinigungen zugeschoben werden könnte.

Von hohem Interesse ist die Untersuchung mit noch schnelleren elektrischen Schwingungen, als die hier angewandten, um die Dispersionscurve weiter fortzusetzen und auch die wichtige Frage zu erörtern, ob innerhalb der experimentell erreichbaren schnellsten elektrischen Schwingungen die Absorption der anomal sich verhaltenden Substanzen mit zunehmender Schwingungszahl wiederum ab-

1) Der Werth von TERESCHIN ist etwas kleiner, als der Werth von NERNST. Indess sind letztere Zahlen wegen der Compensation der Leitfähigkeit wohl als die zuverlässigeren anzusehen, wie auch schon der Umstand zeigt, dass TERESCHIN für Wasser einen unwahrscheinlich hohen Werth (82,6) erhalten hat.

nimmt. Da Dank der erfolgreichen Arbeiten von Righi und Lebedew die Schwingungszahl sehr hoch getrieben werden kann, und (wie ich früher zeigte) schon mit Drahtwellen eine sehr hohe Schwingungszahl zu erreichen ist, so scheinen mir derartige Untersuchungen Erfolg zu versprechen.

Man erhält dann vollkommeneren Aufschluss über die Natur und Lage der Hauptabsorptionsgebiete der Substanzen, und durch die Ausführung dieser elektrischen Spectralanalyse werden sich, da sie die Grundschwingungen der Körper, und zwar der (vielleicht gegenseitig beeinflussten) Moleküle, ergiebt, vermuthlich directere Beziehungen zur chemischen Constitution der Körper ergeben, als sie bisher mit Hülfe der optischen Spectralanalyse ermittelt sind, die vielleicht nur auf hohe Oberschwingungen, oder auf die Grundschwingungen der Atome Schlüsse ziehen lässt.

Schon die bisherigen Resultate locken zu einer Deutung von chemisch-theoretischem Standpunkte aus. Dass es nahe liegt, das Fehlen der Dispersion im Wasser mit der Einfachheit des Molekülbaus und dadurch bedingter hoher Schwingungszahl der Grundschwingung in Beziehung zu setzen, habe ich schon oben Seite 4 angedeutet. Dass Benzol und Anilin trotz hohen Molekulargewichtes tiefer Grundschwingungen entbehren, kann mit der ringförmigen Constitution des Moleküls in Zusammenhang stehen. Denn ein Ring hat einerseits höhere Eigenschwingungen, als ein gestreckter Körper gleicher Länge, andererseits ist er auch weniger fähig, die Energie äusserer elektrischer Wellen in Eigenschwingungen umzusetzen.

Indess entsteht dann die Frage, weshalb für andere Kohlenwasserstoffe und überhaupt sehr viele Körper die Dielektricitätsconstante, wie sie für kleine Schwingungszahlen gefunden wird, nahezu mit dem Quadrat des optischen Brechungsexponenten zusammenfällt. Nach der Dispersionstheorie ist zwar für diese die Existenz langsamer Eigenschwingungen nicht unmöglich[1], aber allerdings sehr unwahrscheinlich.

---

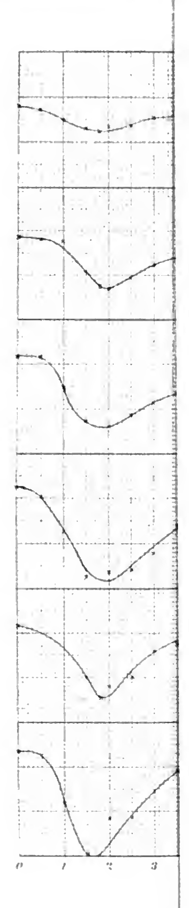
1) Die Dispersionstheorie zieht nur mit Nothwendigkeit den umgekehrten Schluss, dass, falls die Dielektricitätsconstante grösser als das Quadrat des optischen Brechungsexponenten (für rothes Licht) ist, langsamere Eigenschwingungen vorhanden sein müssen.

Die Beantwortung solcher Fragen kann mit Erfolg erst durch Anwendung der elektrischen Spectralanalyse auf viele Substanzen gewonnen werden. Dass diese schon mit verhältnissmässig langen Wellen und einfachen Hülfsmitteln überhaupt möglich ist, möchte ich als Hauptresultat des Mitgetheilten bezeichnen. — Das speciellere Resultat lautet:

1) Glycerin, Aethylalkohol, Amylalkohol, Essigsäure besitzen für schnelle elektrische Schwingungen anomale Dispersion, d. h. Abnahme des elektrischen Brechungsexponenten mit wachsender Schwingungszahl, und (mit Einschluss von Anilin) anomale Absorption, d. h. eine solche, welche viel grösser ist, als sie ihrer Leitfähigkeit für constante Ströme entsprechen würde.

2) Die Dielektricitätsconstante, welche diese Flüssigkeiten für langsame Wechselzahlen besitzen, ist grösser als das Quadrat ihres elektrischen Brechungsexponenten für sehr schnelle Wechselzahlen.

3) Für Wasser, Methylalkohol, Benzol gelten diese Anomalien innerhalb der benutzten Schwingungszahlen nicht, für Äther nur insofern, als er etwas anomale Absorption zu besitzen scheint.


0
1
2
3



ZUR THEORIE

STEHENDER ELEKTRISCHER DRAHTWELLEN

VON

P. DRUDE,

AUSSERORDENTLICHEM MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

MIT EINER TAFEL.

INHALT.

In zwei früheren Arbeiten[1]) habe ich mit Hülfe stehender elektrischer Drahtwellen den elektrischen Brechungsexponenten und die Absorption der Wellen in verschiedenen Flüssigkeiten bestimmt. Besonders die letztere erfordert zu ihrer präcisen quantitativen Berechnung einige ausführlichere theoretische Betrachtungen, die im Folgenden behandelt werden sollen. Diese Betrachtungen haben aber auch einiges, über die hier zunächst erwähnten experimentellen Zwecke hinaus gehendes Interesse, da sie die Theorie der an einer Metallbrücke reflectirten Wellen vollständiger behandeln sollen, als es bisher geschehen ist und auch Antwort geben sollen auf die Frage:

Wie vertheilt sich die elektrische und die magnetische Kraft längs eines Systemes zweier paralleler Drähte, an deren Enden eine schnell wechselnde elektromotorische Kraft besteht, welche ferner in ihrem Verlauf verschiedene Körper von verschiedenem Brechungs- und Absorptionsvermögen durchsetzen, und welche schliesslich an mehreren Stellen metallische Überbrückungen besitzen?

Wenn auch die vollständige Berechnung der in dieser allgemeinsten Gestalt gestellten Frage nicht gegeben werden soll, da sie zu complicirt ausfallen würde, um übersichtlich zu sein, so sollen doch die experimentell wichtigen und interessanten Specialfälle behandelt werden. Es werden sich dadurch einfache experimentelle Methoden zur numerischen Bestimmung sowohl der zeitlichen, als der räumlichen Dämpfung der Wellen ergeben.

---

1) »Über die anomale elektrische Dispersion«, Abhandl. d. mathem.-phys. Kl. der sächs. Ges. d. Wiss. Bd. 23, p. 1, 1896. Im Folgenden citirt als »Arbeit I«; und »Der elektrische Brechungsexponent von Wasser und wässrigen Lösungen«, Ber. d. sächs. Ges. d. Wiss. Juni 1896. p. 315. Im Folgenden citirt als »Arbeit II«.

I. Wellen in Drähten, die überall von Luft umgeben sind.

A. Der Leitungswiderstand der Drähte soll gleich Null angenommen werden.

1) Aufstellung der Differentialgleichungen.

Bei Kleinheit des Leitungswiderstandes der Drähte führt sowohl die Kirchhoff'sche Behandlung des Problems, welche an die Vorgänge in den Drähten anknüpft, wie die Integration der Maxwell'schen Differentialgleichungen des elektromagnetischen Feldes der Umgebung der Drähte zu der gleichen einfachen Lösung[1]. Gehen wir z. B. den Kirchhoff'schen Weg: i sei die elektromagnetisch gemessene Stromstärke in einem der Drähte in einem Punkte $\mathfrak{P}$, der von einem willkürlichen, im Draht liegenden Anfangspunkte an die Entfernung z besitze, e sei die (scheinbare) elektrostatische Ladung der Längeneinheit des Drahtes in $\mathfrak{P}$, d. h. die Anzahl elektrischer Stromlinien, welche in der unmittelbaren Umgebung von $\mathfrak{P}$ aus der Oberfläche der Längeneinheit des Drahtes austreten und in den umgebenden Luftraum sich als elektrische Kraftlinien fortsetzen (und zugleich als Stromlinien der Verschiebungsströme nach Maxwell'scher Auffassung).

Vernachlässigt man zunächst den Widerstand der Drähte noch nicht, sondern bezeichnet man den Widerstand der Längeneinheit eines der Drähte mit w, so ist nach dem Ohm'schen Gesetze, welches sich bisher für Metalle bis zu den schnellsten, eigentlichen elektrischen, d. h. mit elektrischen Hülfsmitteln herstellbaren (nicht optischen) Wellen bewährt hat:

$$iw = E_1 + E_2, \tag{1}$$

wobei rechts die gesammte, pro Längeneinheit wirkende elektromotorische Kraft (nach elektromagnetischem Maasse gemessen) steht. Diese zerfällt in zwei Theile: in die durch zeitliche Stromänderungen hervorgerufene Inductionskraft[2]:

$$E_1 = -\,2\lg\frac{d}{R}\cdot\frac{\partial i}{\partial t}, \tag{2}$$

1) Letzteren Weg ist zuerst Hertz gegangen.

2) Betreffs der näheren Herleitung der Formeln (2), (3) und (5) vgl. Kirchhoff, ges. Abhandl. p. 131, 154, 182 oder auch die »Phys. des Äthers« vom Verf. p. 374 u. ff.

wobei d den gegenseitigen Abstand der Drähte, R ihren Radius bedeutet (es soll R klein gegen d sein), und in die von der scheinbaren elektrostatischen Ladung $\mathfrak{e}$ herrührenden elektrischen Kraft E_2. Die Ladung $\mathfrak{e}$ erzeugt ein Potential

$$V = 2\log\frac{d}{R}\cdot\mathfrak{e}, \tag{3}$$

die von $\mathfrak{e}$ herrührende elektrische Kraft in Richtung der Drahtaxe z ist: $-\frac{\partial V}{\partial z}$. Da aber E_2 elektromagnetisch gemessen werden soll, während $\mathfrak{e}$ und V elektrostatisch definirt sind, so ist

$$E_2 = -c\frac{\partial V}{\partial z} = -2c\lg\frac{d}{R}\cdot\frac{\partial\mathfrak{e}}{\partial z}, \tag{4}$$

wobei c das Verhältniss der elektrostatisch gemessenen zu der elektromagnetisch gemessenen Elektricitätsmenge bedeutet[1]).

Zur Gültigkeit der Formeln (2) und (3) ist vorausgesetzt, dass in gegenüberliegenden Theilen des Drahtsystems stets gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Ströme fliessen, was man durch völlige Symmetrie der ganzen Anordnung experimentell leicht realisiren kann.

Da nun der Stromverlust im Draht pro Längeneinheit, d. h. die Grösse $-\frac{\partial i}{\partial z}$, ganz ersetzt werden soll durch Anhäufung scheinbarer Ladung $\mathfrak{e}$, so gelangt man, unter Berücksichtigung des Umstandes, dass i elektromagnetisch, $\mathfrak{e}$ elektrostatisch gemessen ist, zu der Beziehung:

$$-\frac{\partial i}{\partial z} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{e}}{\partial t}. \tag{5}$$

Durch Differentiation von (1) nach der Zeit t und Einsetzen der Werthe (2), (4), (5) ergiebt sich nun

$$w\frac{\partial i}{\partial t} = 2\lg\frac{d}{R}\left\{-\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + c^2\frac{\partial^2 i}{\partial z^2}\right\}; \tag{6}$$

derselben Differentialgleichung genügt wegen (5) auch $\mathfrak{e}$.

Wird nun der galvanische Widerstand w des Drahtes vernachlässigt, so folgt aus (6), wenn man $\mathfrak{e}$ statt i schreibt:

$$\frac{\partial^2\mathfrak{e}}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\mathfrak{e}}{\partial z^2},$$

$$\text{d. h. } \mathfrak{e} = f_1(z-ct) + f_2(z+ct), \tag{7}$$

1) c ist gleich der Lichtgeschwindigkeit im Vacuum.

worin f_1 und f_2 zwei willkürliche Functionen bedeuten. — Durch (7) ist die wellenartige Ausbreitung der Ladungen e (oder des Stromes i) gekennzeichnet, c ist die Geschwindigkeit, mit der sich irgend welche elektrische Gleichgewichtsstörungen im Drahte fortpflanzen.

Liegt an einer Stelle $z = b$ eine metallische Brücke B über den Drähten; so tritt dort eine Stromverzweigung ein, indem der zufliessende Strom i zum Theil sich als Brückenstrom i', zum Theil als Strom i'' in den Paralleldrähten fortsetzt. Bezeichnet man die Länge der Brücke B durch l, ferner den Widerstand der ganzen Brücke (nicht auf die Längeneinheit bezogen) durch w', so muss nach dem Ohm'schen Gesetze sein

$$i'w' = E_1' + E_2', \tag{8}$$

wobei E_1' die (längs l summirte) Inductionskraft, welche durch Änderungen des Stromes i' entsteht, bedeutet, während E_2' die elektrische Kraft bedeutet, die durch die scheinbaren Ladungen e der Paralleldrähte an den Stellen $z = b$ in der Brücke hervorgerufen wird. — Es wird dabei abgesehen von scheinbaren Ladungen e' auf der Brücke B, d. h. i' wird in der ganzen Brücke als von einerlei Grösse angenommen, was gestattet ist, wenn l nicht sehr gross ist.

Bezeichnet man den Coëfficienten der Selbstinduction der Längeneinheit der Brücke mit L, so ist

$$E_1' = -L \cdot \frac{\partial i'}{\partial t} \cdot l. \tag{9}$$

Der Coëfficient der Selbstinduction L der Brücke ist im Allgemeinen schwer angebbar. Wenn in der kleinen Entfernung d' von B eine zweite Brücke B' liegt, in welcher ein Rückstrom i' bestände, so wäre gemäss (2) näherungsweise zu setzen:

$$L = 2 \lg \frac{d'}{R'}, \tag{10}$$

falls R' den Radius der Brückendrähte bezeichnet. Wenn in der Nähe keine zweite Brücke B' liegt, so findet ein Rückstrom von i' doch statt als Verschiebungsstrom in dem Luftraume zwischen den Drähten, d. h. um so näher an B, je kürzer die Wellenlänge λ ist. Es wird daher näherungsweise zu setzen sein

$$L = 2 \lg \frac{\frac{1}{4}\lambda}{R'}. \tag{11}$$

Im Allgemeinen wird man erwarten, dass L grösser als die Selbstinduction auf den Paralleldrähten, d. h. $L > 2 \lg \frac{d}{R}$, ist, jedoch wegen der geringen Änderung des lg mit seinem Argument wird jedenfalls L und $2 \log \frac{d}{R}$ von etwa gleicher Grössenordnung sein. Eine strenge Berechnung erscheint wohl kaum möglich. Von Bedeutung ist es aber, dass L als constant angesehen werden muss, falls keine zweite Brücke B' näher als $\frac{1}{4}\lambda$ an die Brücke B heranrückt.

Die elektrische Kraft E'_2, welche durch die Ladungen e der Paralleldrähte längs der ganzen Länge l der Brücke hervorgerufen wird, ist gleich dem Unterschiede des Potentiales V an den Enden der Brücke, d. h. nach (3) in elektromagnetischem Maasse:

$$E'_2 = c \cdot 4 e \lg \frac{d}{R} \cdot \tag{12}$$

Es ist daher nach (8), wenn der Widerstand der Brücke w' vernachlässigt wird:

$$L \cdot l \cdot \frac{\partial i'}{\partial t} = 4 c e \cdot \lg \frac{d}{R}, \quad (z = b). \tag{13}$$

Diese Gleichung in Verbindung mit

$$i = i' + i'', \quad (z = b), \tag{14}$$

sowie

$$e = e'' \quad (z = b), \tag{15}$$

stellen die Bedingungen dar, welche bei einer Brücke zu erfüllen sind; e'' bedeutet die elektrische Ladung der Längeneinheit der Drähte hinter der Brücke. Man erkennt aus (13), dass bei kurzen Brückenlängen l (die Länge l kann man beliebig vergrössern, wenn man gebogene Brücken verwendet; nur ist die untere Grenze $l > d$ vorgeschrieben) die Bedingung an einer Brücke näherungsweise lautet:

$$e = 0 \quad \text{für } z = b. \tag{16}$$

In dieser Form ist die Brückenbedingung bisher behandelt worden.

2) Reflexion und Übergang von Wellen an einer Brücke.

Es soll der Fall betrachtet werden, dass periodische Störungen, die eine zeitliche Dämpfung besitzen, in dem Drahtsystem vor der Brücke vorhanden sind. Wir setzen demgemäss

$$(17) \qquad \mathfrak{e} = A \cdot e^{-\gamma\left(\frac{t}{T}-\frac{z}{\lambda}\right)} \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda}\right).$$

Dabei bedeutet T die Periode der Schwingung, λ die Wellenlänge, γ die (zeitliche) Dämpfungsconstante. Nach (7) muss sein

$$(18) \qquad \lambda = cT.$$

Die Gleichung (17) sagt aus, dass eine, an einer Stelle des Drahtsystems auftretende Störung

$$(19) \qquad \mathfrak{e} = A \cdot e^{-\gamma \frac{t}{T}} \cdot \cos 2\pi \frac{t}{T}$$

ungeschwächt, d. h. ohne räumliche Dämpfung (Absorption) nach den positiven z längs der Drähte fortgepflanzt wird. — Man kann $\mathfrak{e}$ nach (17) durch den reellen Theil einer Exponentialfunction complexen Argumentes darstellen. Wir wollen $\mathfrak{e}$ dieser Exponentialfunction selbst gleichsetzen, und am Schlusse der Rechnung die physikalische Bedeutung durch Benutzung des reellen Theiles allein hervortreten lassen. Dieser Weg ist gestattet, da alle Gleichungen linear und homogen sind, d. h. da für alle Gleichungen das Superpositionsprincip gilt; er bietet gewisse Vortheile rechnerischer Einfachheit. Wir setzen demgemäss:

$$(20) \qquad \mathfrak{e} = A \cdot e^{\alpha\left(\frac{t}{T}-\frac{z}{\lambda}\right)},$$

wobei nach (17) ist

$$(21) \qquad \alpha = -\gamma + 2\pi\sqrt{-1}.$$

Aus (5) folgt

$$(22) \qquad i = A \cdot e^{\alpha\left(\frac{t}{T}-\frac{z}{\lambda}\right)}.$$

Diese Gleichungen stellen Wellen dar, welche sich nur nach der positiven z-Axe fortpflanzen; wir wollen sie **einfallende** Wellen nennen.

Wenn die Wellen auf eine Brücke treffen (bei $z = b$), so werden sie dort theilweise **reflectirt**, als

$$(23) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{e}_r &= A_r \cdot e^{\alpha\left(\frac{t}{T}+\frac{z}{\lambda}+\Delta\right)} \\ i_r &= -A_r \cdot e^{\alpha\left(\frac{t}{T}+\frac{z}{\lambda}+\Delta\right)}, \end{aligned}$$

theilweise pflanzen sie sich über die Brücke hinaus fort, als

$$(24)\qquad \begin{aligned} e'' &= A''\cdot e^{\alpha\left(\frac{t}{T}-\frac{z}{\lambda}+\varDelta''\right)} \\ i'' &= A''\cdot e^{\alpha\left(\frac{t}{T}-\frac{z}{\lambda}+\varDelta''\right)}, \end{aligned}$$

theilweise gehen sie in die Brücke B selbst hinein. Ohne solche reflectirten Antheile würde man nämlich nicht die Brückenbedingungen (13), (14), (15) erfüllen können. Das negative Vorzeichen in (23) für i_r muss deshalb gesetzt werden, weil nach (5) sein muss

$$-\frac{\partial i_r}{\partial z} = \frac{1}{c}\frac{\partial e_r}{\partial t}.$$

Von der Zeit an, in welcher die Wellen die Brücke erreicht haben, ist also zu setzen:

$$(25)\qquad \begin{aligned} e &= A\cdot e^{\alpha\left(\frac{t}{T}-\frac{z}{\lambda}\right)} + A_r\cdot e^{\alpha\left(\frac{t}{T}+\frac{z}{\lambda}+\varDelta\right)} \\ i &= A\cdot e^{\alpha\left(\frac{t}{T}-\frac{z}{\lambda}\right)} - A_r\cdot e^{\alpha\left(\frac{t}{T}+\frac{z}{\lambda}+\varDelta\right)}. \end{aligned}$$

Infolge der dritten Brückenbedingung (15) muss sein:

$$(26)\qquad A\cdot e^{-\alpha\frac{b}{\lambda}} + A_r\cdot e^{\alpha\left(\frac{b}{\lambda}+\varDelta\right)} = A''\cdot e^{\alpha\left(-\frac{b}{\lambda}+\varDelta''\right)}.$$

Ferner ist nach (14)

$$i' = i - i'' = A\cdot e^{\alpha\left(\frac{t}{T}-\frac{b}{\lambda}\right)} - A_r e^{\alpha\left(\frac{t}{T}+\frac{b}{\lambda}+\varDelta\right)} - A'' e^{\alpha\left(\frac{t}{T}-\frac{b}{\lambda}+\varDelta''\right)},$$

d. h. wenn man A'' mit Hülfe der vorigen Gleichung eliminirt:

$$(27)\qquad i' = -2A_r\cdot e^{\alpha\left(\frac{t}{T}+\frac{b}{\lambda}+\varDelta\right)}.$$

Daher wird die Brückenbedingung (13):

$$-A_r\cdot Ll\frac{\alpha}{\lambda}e^{\alpha\left(\frac{b}{\lambda}+\varDelta\right)} = 2\lg\frac{d}{R}\left\{Ae^{-\alpha\frac{b}{\lambda}} + A_r e^{\alpha\left(\frac{b}{\lambda}+\varDelta\right)}\right\},$$

oder

$$(28)\qquad A_r\cdot e^{\alpha\varDelta} = -\frac{A\cdot e^{-2\alpha\frac{b}{\lambda}}}{1+\dfrac{\alpha l L}{2\lambda\lg\frac{d}{R}}}.$$

Aus (26) folgt dann gemäss (28):

$$(29)\qquad A''\cdot e^{\alpha\varDelta''} = A\cdot\frac{\alpha l L : 2\lambda\lg\frac{d}{R}}{1+\dfrac{\alpha l L}{2\lambda\lg\frac{d}{R}}}.$$

Durch (28) und (29) ist die reflectirte, sowie die über die Brücke hinaus gelangende Welle vollkommen aus der einfallenden bestimmt.

Wenn $\alpha l L$ vernachlässigt wird gegen $2\lambda \lg \frac{d}{R}$, so würde aus (28) folgen

$$A_r = -A, \quad \Delta = -\frac{2b}{\lambda},$$

d. h. die Wellen werden bei sehr kurzer Brückenlänge an der Brücke mit Umkehr ihrer Amplitude reflectirt, und die reflectirte Welle hat dieselbe Amplitude, wie die einfallende. Aus (29) folgt dann $A'' = 0$, d. h. es pflanzt sich gar keine Welle über die Brücke hinaus fort.

Wenn nicht jene Vernachlässigung eintritt, so soll zunächst zur Abkürzung das Verhältniss der Selbstinduction der Längeneinheit auf der Brücke und auf einem der Paralleldrähte mit ζ bezeichnet werden, d. h.

$$\zeta = L : 2 \lg \frac{d}{R}. \tag{30}$$

Ferner sollen vier (reelle) Hülfsgrössen ϱ, φ, ϱ'', φ'' eingeführt werden durch die Gleichungen:

$$\frac{1}{1 + \alpha\zeta\frac{l}{\lambda}} = \varrho \cdot e^{-\alpha\varphi}, \tag{31}$$

$$-\alpha = \varrho'' \cdot e^{-\alpha\varphi''}, \tag{32}$$

d. h. nach Bedeutung des α gemäss (21):

$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\pi\varphi &= \frac{2\pi\zeta\frac{l}{\lambda}}{1 - \gamma\zeta\frac{l}{\lambda}}, \\ \varrho^2 \cdot e^{2\gamma\varphi} &= \frac{1}{\left(1 - \gamma\zeta\frac{l}{\lambda}\right)^2 + \left(2\pi\zeta\frac{l}{\lambda}\right)^2}, \\ \operatorname{tg} 2\pi\varphi'' &= \frac{2\pi}{\gamma}, \\ \varrho''^2 \cdot e^{2\gamma\varphi''} &= \gamma^2 + 4\pi^2. \end{aligned}\right. \tag{33}$$

Dann wird (28) zu:

$$A_r \cdot e^{\alpha\Delta} = -A\varrho \cdot e^{-\alpha\left(\varphi + 2\frac{b}{\lambda}\right)}, \tag{34}$$

woraus folgt

$$A_r = -A\varrho, \quad \Delta = -2\frac{b}{\lambda} - \varphi; \tag{34'}$$

während (29) wird zu:

$$A'' \cdot e^{\alpha \Delta''} = - A \varrho \varrho'' \zeta \frac{l}{\lambda} e^{-\alpha(\varphi + \varphi'')}, \tag{35}$$

woraus folgt

$$A'' = - A \varrho \varrho'' \zeta \frac{l}{\lambda}, \quad \Delta'' = - \varphi - \varphi''. \tag{35'}$$

Aus (33) folgt, dass $\varrho . e^{\gamma \varphi} < 1$ ist, falls $\gamma < 2\pi^2 \zeta \frac{l}{\lambda}$ ist. Da γ wohl stets kleiner als 0,5 ist (bei meinen Experimenten war es 0,15 cf. unten), so ist diese Relation bei nicht zu kleinen Brückenlängen l erfüllt. Aus (34) ergiebt sich, dass durch $\varrho . e^{\gamma \varphi}$ das Verhältniss der Amplituden der einfallenden und reflectirten Welle gemessen wird. Die Amplitude der reflectirten Welle ist daher kleiner, als die der einfallenden Welle, und zwar um so mehr, je länger die Brücke ist.

Aus (35') folgt, dass die Amplitude A'' der über die Brücke weiter gehenden Welle mit der Länge l der Brücke beständig wächst, und dass sie für kurze Brückenlängen l dieser Länge l proportional ist. — Auf diese Thatsache bin ich zunächst durch das Experiment aufmerksam geworden und habe sie an früherer[1]) Stelle hervorgehoben.

Bei kurzen Brücken ist φ sehr klein. φ'' ist nach (33) nahezu $\frac{1}{4}$, da γ meist klein gegen 2π ist (z. B. bei den von mir angestellten Experimenten ist $\gamma = 0,15$. Wohl sehr selten kommt γ über den Werth 0,5). Daher folgt aus (35'), dass die Phase der weiter gehenden Welle um fast $\frac{\pi}{2}$ von der der einfallenden Welle verschieden ist.

Was die Phase der reflectirten Welle anbelangt, so kann man sich eine anschauliche Vorstellung von ihr machen, wenn man die Wirkung der thatsächlich vorhandenen Brücke B von der endlichen Länge l auf die Phase der reflectirten Wellen ersetzt denkt durch die Wirkung einer idealen Brücke der Länge $l = 0$, welche nicht an der Stelle $z = b$, sondern an einer anderen Stelle $z = b'$ liegen müsste. Diese Brücke würde die Wellen einfach mit Umkehr ihrer Amplitude reflectiren, und (nach pag. 70) die Phase

$$\Delta = - 2b' : \lambda$$

1) Wied. Ann. 54, p. 360, 1895. — Ber. der sächs. Ges. d. Wiss., math.-phys. Klasse, Mai 1895, p. 333. — Wied. Ann. 55, p. 637, 1895. — Arbeit I, p. 14.

hervorbringen. Identificirt man dieses Δ mit dem nach (34') durch die wirkliche Brücke hervorgebrachten Δ, so müsste also sein:

$$-\frac{2b'}{\lambda} = -\frac{2b}{\lambda} - \varphi,$$

oder

$$b' - b = \varphi \cdot \frac{\lambda}{2}. \tag{36}$$

Diese Differenz $b' - b$ habe ich in den eingangs citirten experimentalen Arbeiten die Bügelverkürzung oder Brückenverkürzung genannt. Nach (36) ist sie stets positiv, d. h. die ideale Brücke würde stets hinter der wirklichen liegen.

Für kurze Brücken, bei denen es gestattet ist, $\operatorname{tg}\varphi = \varphi$ zu setzen, ist nach (33) und (36)

$$b' - b = \tfrac{1}{2}\, l \cdot \zeta, \tag{37}$$

d. h. die Brückenverkürzung ist der Brückenlänge proportional und wächst langsam mit der Wellenlänge der Schwingung (da nach (11) ζ den Summand $\lg \lambda$ enthält). — Diese Sätze werden durch die Erfahrung bestätigt. Für verhältnissmässig kurze Wellen ($\lambda = 75$ cm) habe ich gefunden[1]), dass die Brückenverkürzung bei $l = 1{,}8$ cm etwa 8 mm betrug, d. h. ζ ist ein wenig kleiner als 1. — Für sehr viel längere Wellen ($\lambda = 4$ m bis 12 m) fanden Cohn und Zeemann[2]) bei $l = 7$ cm $b' - b = 4{,}5$ cm, d. h. ζ ist dann grösser als 1. — Roh geschätzt wird die Bügelverkürzung (bei Drahtwellen in Luft) die halbe Brückenlänge betragen.

Wenn, wie es meist der Fall ist, γ klein gegen 2π ist, so folgt aus (33), dass das Amplitudenverhältniss $\varrho . e^{\gamma\varphi}$ der einfallenden und reflectirten Welle nur um zweite Ordnung von 1 verschieden ist, wenn die Bügelverkürzung von erster Ordnung klein ist. Wenn also $\left(2\pi\zeta\frac{l}{\lambda}\right)^2$ gegen 1 vernachlässigt werden kann, wie es meist nahezu der Fall ist, so kann die Brückenverkürzung merklich sein, die Schwächung bei der Reflexion aber unmerklich.

Nach (33) kann die Amplitudenschwächung durch Reflexion $\varrho e^{\gamma\varphi}$ ausgedrückt werden durch die Brückenver-

1) »Arbeit I«, p. 31. Der Drahtabstand d betrug 1,8 cm, $R = \frac{1}{2}$ mm.

2) E. Cohn u. P. Zeemann, Königl. Akad. d. Wiss. zu Amsterdam, Sept. 1895. Der Drahtabstand d betrug 7 cm.

kürzung $b' - b = \delta b$. Benutzt man die Formel (37), d. h. setzt l sehr klein voraus, und vernachlässigt man γ gegen $2\pi^2\zeta\frac{l}{\lambda}$, so wird nach (33)

$$\varrho^2 \cdot e^{2\gamma\varphi} = \frac{1}{1 + \left(4\pi\frac{\delta b}{\lambda}\right)^2}.$$

Da ich bei einer Brückenlänge von 1,8 cm 8 mm Bügelverkürzung beobachtete bei $\lambda = 75$ cm, so würde folgen:

$$\varrho^2 \cdot e^{2\gamma\varphi} = \frac{1}{1{,}018}, \text{ d. h. } \varrho \,.\, e^{\gamma\varphi} = 1 - 0{,}009.$$

Für 6 cm Bügellänge würde folgen $\varrho \cdot e^{\gamma\varphi} = 0{,}91$.

Ebenso drückt sich nach (35) die Amplitude der weitergehenden Welle durch δb aus. Sie ist

$$\frac{4\pi\frac{\delta b}{\lambda}}{1 + \left(4\pi\frac{\delta b}{\lambda}\right)^2}.$$

Für $l = 1{,}8$ cm ergiebt sie sich zu 0,132; für $l = 6$ cm zu 0,372, wobei die Amplitude der einfallenden Welle $= 1$ gesetzt ist.

3) Vorhandensein zweier Brücken.

Es soll jetzt der Fall näher betrachtet werden, wie er experimentell vorliegt, wenn man die Wellenlänge der elektrischen Schwingungen bestimmen will, welche in dem Drahtsystem durch irgend einen Erreger einer schnell oscillirenden elektrischen Kraft (einerlei ob es Lecher'scher oder Blondlot'scher Erreger ist) hervorgerufen werden. Der Erreger befindet sich vor einer festliegenden Brücke B_1, die bei $z = 0$ auf den Drähten liegt; dahinter wird eine Brücke B_2 verschoben, deren Entfernung von B_1 mit $z = b$ bezeichnet werden soll; jenseit B_2 sollen die Paralleldrähte ins Unendliche verlaufen. Es handelt sich um die Bestimmung der Stromstärke i und scheinbaren Ladung $\mathfrak{e}$ in einem beliebigen Punkte $\mathfrak{P}$, welcher zwischen beiden Brücken liegen soll. Seine Entfernung von $z = 0$ sei $z = p\,.\,\lambda$.

Knüpfen wir die Rechnung nur an die scheinbare Ladung $\mathfrak{e}$ der Drähte an. Die Stromstärke i ergiebt sich gemäss der Gleichung (5).

Von $\mathfrak{e}$ hängt die Wirkung der Wellen auf die Lichterscheinung in einer über die Drähte gelegten Vacuumröhre ab; ebenso, wenn

die Röhre zwei, durch einen (als Resonator wirkenden) Draht verbundene Elektroden hat, falls die Ebene dieses Drahtes senkrecht zu den Paralleldrähten steht[1]. Wie eine ausführlichere Analyse[2] ergiebt, hängt nämlich dann die Leuchtwirkung von der elektrischen Kraft P im Luftraume zwischen den Drähten ab, und P ist zu $\mathfrak{e}$ proportional (da es durch Differentiation des Potentiales V (Formel (3)) entsteht). — Wir wollen jetzt einfach P für $\mathfrak{e}$ schreiben.

Es möge nun von der Zeit $t = 0$ an durch den Erreger über die erste Brücke B_1 die Welle

$$P = e^{\alpha\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda}\right)} \tag{38}$$

herüber gesandt werden[3]. Diese erreicht den Punkt $z = p\lambda$ zur Zeit $t = pT$. Es bestehen also in diesem Punkte $\mathfrak{P}$ einfallende Wellen P_1, welche das Gesetz befolgen:

$$P_1 = e^{\alpha\left(\frac{t}{T} - p\right)} \quad \text{von } t = pT \text{ bis } t = \infty. \tag{39}$$

Die einfallenden Wellen gelangen nun an die Brücke B_2, welche sich in der Entfernung $z = b = \beta\lambda$ von der ersten Brücke B_1 befinde, zur Zeit $t = \beta T$. Der Effect der Reflexion ist nach der ersten der Formeln (23) der, dass zu der einfallenden Welle

$$P_1 = e^{\alpha\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda}\right)}$$

der Factor $A_r \cdot e^{\alpha\Delta}$ hinzutritt, und das Vorzeichen von z umgekehrt wird. Bezeichnen wir diesen complexen Factor kurz als Reflexionsfactor r, so ist nach (34), da hier $A = 1$ angenommen ist:

$$A_r \cdot e^{\alpha\Delta} = r = -\varrho \cdot e^{-\alpha(\varphi + 2\beta)}. \tag{40}$$

Die an der Brücke reflectirten Wellen sind also:

$$P = r \cdot e^{\alpha\left(\frac{t}{T} + \frac{z}{\lambda}\right)}.$$

Sie erreichen den Punkt $\mathfrak{P}$ ($z = p\lambda$) zur Zeit $t = \beta T + (\beta - p)T$.

---

[1] Vgl. Fig. 3 in Ber. d. sächs. Ges. math.-phys. Kl. 1895, p. 339. — Wied. Ann. 55, p. 643, 1895.

[2] Wied. Ann. 53, p. 721, 1894.

[3] Die Amplitude wird also gleich 1 gesetzt. — In Wirklichkeit wird der zeitliche Verlauf von P complicirter sein. Jedoch wird P um so eher obiges Gesetz befolgen, je näher B_1 nach dem Erreger zu liegt. Bei den Experimenten war B_1 etwa nur $\frac{1}{8}$ Wellenlänge vom Erreger entfernt.

Von dieser Zeit an bis zu $t = \infty$ bestehen also in $\mathfrak{P}$ reflectirte Wellen nach dem Gesetz:

$$(41) \qquad P_2 = r \cdot e^{\alpha\left(\frac{t}{T}+p\right)} \quad \text{für} \ (2\beta - p)\,T < t < \infty.$$

Diese reflectirten Wellen gelangen zur Zeit $t = 2\beta T$ an die erste Brücke B_1 (bei $z = 0$), und werden an ihr reflectirt. Der Reflexionsfactor r' an B_1 ist dadurch von r verschieden, dass die Brücke bei $z = 0$ liegt. Es ist demnach

$$(42) \qquad r' = -\varrho \cdot e^{-\alpha\varphi}.$$

Die an der Brücke B_1 reflectirten Wellen haben also den Werth:

$$P = rr'e^{\alpha\left(\frac{t}{T}-\frac{z}{\lambda}\right)}.$$

Sie gelangen zur Zeit $t = (2\beta + p)\,T$ zum Punkte $\mathfrak{P}$. Von dieser Zeit an bestehen also in $\mathfrak{P}$ auch Wellen des Werthes

$$(43) \qquad P_3 = rr'e^{\alpha\left(\frac{t}{T}-p\right)} \quad \text{für} \ (2\beta + p)\,T < t < \infty.$$

Diese Wellen kommen zur Zeit $t = 3\beta T$ zur Reflexion an der Brücke B_2, werden dort reflectirt zu

$$P = r^2r'e^{\alpha\left(\frac{t}{T}+\frac{z}{\lambda}\right)}$$

und erreichen den Punkt $\mathfrak{P}$ zur Zeit $t = (4\beta - p)\,T$. Von dieser Zeit an kommen also in $\mathfrak{P}$ Wellen hinzu

$$(44) \qquad P_4 = r^2r'e^{\alpha\left(\frac{t}{T}+p\right)} \quad \text{für} \ (4\beta - p)\,T < t < \infty.$$

In dieser Weise ist die Betrachtung fortzusetzen. Wenn man den Werth der elektrischen Kraft P im Punkte $\mathfrak{P}$ zu irgend einer Zeit erfahren will, so ist die Summe aller derjenigen Einzelkräfte P_1, P_2, P_3 etc. zu bilden, welche von Wellen herrühren, die zu dieser Zeit den Punkt $\mathfrak{P}$ schon erreicht haben.

Für die gesammte elektrische Kraft P erhalten wir daher folgenden Verlauf:

$$
(45)\left\{\begin{aligned}
&p<\frac{t}{T}<2\beta-p:\ P=e^{\alpha\left(\frac{t}{T}-p\right)},\\
&2\beta-p<\frac{t}{T}<2\beta+p:\ P=e^{\alpha\left(\frac{t}{T}-p\right)}+r\cdot e^{\alpha\left(\frac{t}{T}+p\right)},\\
&2\beta+p<\frac{t}{T}<4\beta-p:\ P=e^{\alpha\left(\frac{t}{T}-p\right)}(1+rr')+r\cdot e^{\alpha\left(\frac{t}{T}+p\right)},\\
&4\beta-p<\frac{t}{T}<4\beta+p:\ P=e^{\alpha\left(\frac{t}{T}-p\right)}(1+rr')+r\cdot e^{\alpha\left(\frac{t}{T}+p\right)}(1+rr'),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\qquad\qquad 2h\beta+p<\frac{t}{T}<2(h+1)\beta-p:\\
&P=e^{\alpha\frac{t}{T}}\left\{e^{-\alpha p}[1+rr'+(rr')^2+\cdots+(rr')^h]+r\cdot e^{+\alpha p}[1+rr'+(rr')^2+\cdots+(rr')^{h-1}]\right\}.\\
&\qquad 2(h+1)\beta-p<\frac{t}{T}<2(h+1)\beta+p:\\
&P=e^{\alpha\frac{t}{T}}\left\{e^{-\alpha p}+re^{+\alpha p}\right\}\left\{1+rr'+(rr')^2+\cdots+(rr')^h\right\}.
\end{aligned}\right.
$$

Nun ist

$$(46)\qquad 1+rr'+(rr')^2+\cdots+(rr')^h=\frac{(rr')^{h+1}-1}{rr'-1}.$$

Daher wird

für $2h\beta+p<\frac{t}{T}<2(h+1)\beta-p$:

$$(47)\quad P_{\mathrm{I}}=\frac{e^{\alpha\frac{t}{T}}}{rr'-1}\left\{e^{-\alpha p}\left[(rr')^{h+1}-1\right]+r\cdot e^{+\alpha p}\left[(rr')^h-1\right]\right\},$$

für $2(h+1)\beta-p<\frac{t}{T}<2(h+1)\beta+p$:

$$(48)\quad P_{\mathrm{II}}=\frac{e^{\alpha\frac{t}{T}}}{rr'-1}\left[e^{-\alpha p}+r\cdot e^{+\alpha p}\right]\left[(rr')^{h+1}-1\right].$$

Es sind an P die Indices I und II angehängt, um die für beide Zeitintervalle formal verschieden gestalteten P kurz im Folgenden unterscheiden zu können.

Nach (40) und (42) ist nun

$$(49)\qquad rr'=\varrho^2\cdot e^{-2\alpha(\varphi+\beta)}=\varrho^2\cdot e^{2\gamma(\varphi+\beta)}\cdot e^{4\pi(\varphi+\beta)\sqrt{-1}}.$$

Der gemeinsame Nenner von P_{I} und P_{II}, d. h. der Modul der complexen Grösse $rr'-1$, wird möglichst klein, wenn

$$e^{-4\pi(\varphi+\beta)\sqrt{-1}}=+1$$

ist, d. h. wenn ist

$$(50)\qquad \varphi+\beta=\tfrac{1}{2},\ \tfrac{2}{2},\ \tfrac{3}{2},\ \tfrac{4}{2}\ \text{etc.}$$

Für diese Werthe von β, d. h. für diese Lagen der Brücke B_2, werden P_I und P_{II} möglichst gross, es sind die Knotenlagen des Bügels B_2. Man erkennt leicht, dass in diesen Knotenlagen durch die beiden Brücken B_1 und B_2 eine geschlossene Drahtleitung abgegrenzt wird, deren Eigenschwingungsdauern den Werth T entweder als Grundton oder als Oberton besitzen. In den Knotenlagen der Brücke B_2 findet also Resonanz des abgegrenzten Theiles der Paralleldrähte mit dem Erreger statt.

Führt man die Entfernung $b = \beta\lambda$ des Bügels B_2 vom Bügel B_1 ein, so ist für:

$$(51)\qquad \begin{aligned} &1.\ \text{Knoten}\ b_1 = \frac{\lambda}{2} - \lambda\varphi,\\ &2.\ \text{Knoten}\ b_2 = 2\frac{\lambda}{2} - \lambda\varphi,\\ &3.\ \text{Knoten}\ b_3 = 3\frac{\lambda}{2} - \lambda\varphi,\\ &\qquad \text{etc. etc.} \end{aligned}$$

Der Knotenabstand ist also $\frac{1}{2}\lambda$; da nach (36) $\lambda\varphi$ gleich der doppelten Brückenverkürzung ist, so liegt die erste Knotenlage der Brücke B_2 um die doppelte Brückenverkürzung näher, als $\frac{1}{2}\lambda$, an die Brücke B_1 heran.

P_I und P_{II} werden Minima für

$$e^{-4\pi(\varphi+\beta)\sqrt{-1}} = -1,$$

d. h. für

$$(52)\qquad \varphi + \beta = \tfrac{1}{4},\ \tfrac{3}{4},\ \tfrac{5}{4}\ \text{etc.}$$

Hierdurch sind die Bauchlagen des Bügels B_2 bestimmt. Sie liegen mitten zwischen den Knotenlagen und werden:

$$(53)\qquad \begin{aligned} &1.\ \text{Bauch}\ {}_1b = \frac{\lambda}{4} - \lambda\varphi,\\ &2.\ \text{Bauch}\ {}_2b = \frac{3\lambda}{4} - \lambda\varphi,\\ &3.\ \text{Bauch}\ {}_3b = \frac{5\lambda}{4} - \lambda\varphi,\\ &\qquad \text{etc. etc.} \end{aligned}$$

Wir wollen jetzt näher die Werthe von P_I und P_{II} für die Knoten-, bezw. Bauchlagen berechnen. Das Charakteristische für diese Lagen ist, dass rr' reell ist, und zwar

$$(54)\qquad \begin{aligned} rr' &= +\varrho^2\cdot e^{2\gamma(\varphi+\beta)} \text{ für Knoten,}\\ rr' &= -\varrho^2\cdot e^{2\gamma(\varphi+\beta)} \text{ für Bauch.}\end{aligned}$$

Setzt man für das Zeitintervall I:

$$(55)\qquad \frac{t}{T} = 2h\beta + p + \eta\,,$$

wobei

$$(55')\qquad 0 < \eta < 2\beta - 2p\,,$$

für das Zeitintervall II:

$$(56)\qquad \frac{t}{T} = 2(h+1)\beta - p + \vartheta\,,$$

wobei

$$(56')\qquad 0 < \vartheta < 2p\,,$$

so wird nach (47) und (48), wenn man noch zur Abkürzung setzt

$$(57)\qquad \varrho^2 e^{2\gamma\varphi} = f,\quad e^{+2\gamma\beta} = g,\quad i = \sqrt{-1}\,,$$

für eine Knotenlage des B_2:

$$rr' = fg,\quad r = -g\sqrt{f}\cdot e^{i2\pi\varphi}\,,$$

$$(58)\quad P_{\text{I}} = e^{i2\pi(2h\beta+\eta)}\cdot e^{-\gamma\eta}\frac{g}{fg-1}\left\{f^{h+1} - g^{-(h+1)} - \left(f^h - g^{-h}\right)e^{-2p\gamma}\sqrt{f}\cdot e^{i2\pi(2p+\varphi)}\right\},$$

$$(58')\quad P_{\text{II}} = e^{i2\pi(2h\beta+\vartheta+2\beta-2p)}\cdot e^{-\gamma\vartheta}\frac{g}{fg-1}\left[e^{-2\gamma(\beta-p)} - \sqrt{f}\cdot e^{i2\pi(2p+\varphi)}\right]\left(f^{h+1} - g^{-h+1}\right).$$

Dagegen ist für eine Bauchlage des B_2:

$$rr' = -fg,\quad r = +g\sqrt{f}\cdot e^{i2\pi\varphi},$$

$$(59)\quad {}_{\text{I}}P = e^{i2\pi(2h\beta+\eta)}\cdot e^{-\gamma\eta}\frac{g}{fg+1}\left\{(-1)^h f^{h+1} + g^{-(h+1)} - \left((-1)^h f^h - g^{-h}\right)e^{-2p\gamma}\sqrt{f}\cdot e^{i2\pi(\varphi+2p)}\right\},$$

$$(59')\quad {}_{\text{II}}P = e^{i2\pi(2h\beta+\vartheta+2\beta-2p)}\cdot e^{-\gamma\vartheta}\frac{g}{fg+1}\left[e^{-2\gamma(\beta-p)} + \sqrt{f}\cdot e^{i2\pi(2p+\varphi)}\right]\left((-1)^h f^{h+1} + g^{-(h+1)}\right).$$

Da nach (33) und (57) $f < 1$, $g > 1$ ist, so erkennt man aus den Formeln (58) bis (59'), dass die elektrische Kraft P für $h = \infty$ verschwindet. Sie erreicht also für eine gewisse Zeit einen Maximalwerth, und dieser wird gefunden, wenn man

$$(60)\qquad \frac{\partial P}{\partial h} = 0$$

macht. Die Gleichungen (58) bis (59') beantworten die Frage, wie P längs des Drahtsystems variirt, d. h. die Abhängigkeit des P von p. Von besonderem Interesse ist die Untersuchung der elektrischen Kraft an demjenigen Punkte $\mathfrak{P}$ des Drahtsystems, für welchen bei Knoten-

lagen des B_2 P ein Maximum ist. Wie aus (58) und (58') hervorgeht, tritt dies ein für

$$e^{i2\pi(2p+\varphi)} = -1, \tag{61}$$

$$\text{d. h. } 2p = \tfrac{1}{2} - \varphi .$$

Die Entfernung dieses Punktes $\mathfrak{P}$ von der ersten Brücke B_1 ist also

$$p\lambda = \tfrac{1}{4}\lambda - \tfrac{1}{2}\lambda \cdot \varphi ;$$

dieser Punkt liegt also nach (51) in der Mitte zwischen B_1 und der ersten Knotenlage von B_2. Bei den von mir angestellten Experimenten ist an diesem Punkte die Vacuumröhre aufgestellt. Ihre Leuchtwirkung hängt also ab von der elektrischen Kraft an diesem Punkte.

Fassen wir diesen Punkt jetzt ins Auge, so lässt sich für ihn die Amplitude der elektrischen Kraft nach den Formeln (58) bis (59') sofort hinschreiben, da nur der erste Factor in jenen Formeln eine complexe Grösse ist, während die anderen Factoren infolge (61) sämmtlich reell sind. Die Amplituden der elektrischen Kraft werden daher für diesen Punkt $\mathfrak{P}$, wenn man die unwesentlichen Factoren $e^{-\gamma\eta}$ und $e^{-\gamma\vartheta}$ fortlässt:

$$(62)\quad \begin{aligned}
A_{\mathrm{I}} &= \frac{g}{fg-1}\left\{f^{h+1} - g^{-(h+1)} + \left(f^h - g^{-h}\right)\sqrt{f}\cdot e^{\gamma(\varphi-\frac{1}{2})}\right\},\\
A_{\mathrm{II}} &= \frac{g}{fg-1}\left\{e^{-\gamma(\varphi-\frac{1}{2}+2\beta)} + \sqrt{f}\right\}\cdot\left\{f^{h+1} - g^{-(h+1)}\right\},\\
{}_{\mathrm{I}}A &= \frac{g}{fg+1}\left\{(-1)^h f^{h+1} + g^{-(h+1)} + \left((-1)^h f^h - g^{-h}\right)\sqrt{f}\cdot e^{\gamma(\varphi-\frac{1}{2})}\right\},\\
{}_{\mathrm{II}}A &= \frac{g}{fg+1}\left\{e^{-\gamma(\varphi-\frac{1}{2}+2\beta)} - \sqrt{f}\right\}\cdot\left\{(-1)^h f^{h+1} + g^{-(h+1)}\right\}.
\end{aligned}$$

Der Maximalwerth, den diese Amplituden im Laufe der Zeit annehmen können, ist zu berechnen, wenn man nach (60) den Differentialquotienten nach h gleich Null setzt. Es ist klar, dass für die Knotenlagen diese Maxima in einer um so späteren Zeit, d. h. für um so grösseres h eintreten, je mehr f sich dem Werthe 1 nähert. Nach (57) bedeutet $\sqrt{f}$ das Verhältniss der Amplituden der an der Brücke reflectirten Welle zu der der einfallenden. Nach pag. 73 ist $\sqrt{f} = 1 - 0{,}009$ für die in meinen Experimenten gewählten Anordnungen, d. h. für $l = 1{,}8$ cm und $\lambda = 75$ cm. Man erhält daher schon ein sehr nahe richtiges Bild der Amplituden A, wenn man $f = 1$ setzt. Dann treten die Maxima der A_{I} und A_{II} für $h = \infty$

ein, d. h. nach unendlich langer Zeit. Dies ist auch von vornherein klar, denn bei $f = 1$ geht durch Reflexion keine Energie verloren und es gelangt fortwährend Zufuhr über B_1 in das Drahtsystem.

Für $h = \infty$ ergiebt sich, falls man in (62) auch $\varphi = 0$ setzt, was bei $f = 1$ annäherungsweise gestattet ist:

$$\text{Max. } A_{\text{I}} = \frac{e^{2\gamma\beta}}{e^{2\gamma\beta} - 1}\left(1 + e^{-\frac{\gamma}{2}}\right) = \frac{e^{2\gamma\beta} + e^{\gamma(2\beta - \frac{1}{2})}}{e^{2\gamma\beta} - 1},$$

$$\text{Max. } A_{\text{II}} = \frac{e^{2\gamma\beta}}{e^{2\gamma\beta} - 1}\left(1 + e^{\gamma(\frac{1}{2} - 2\beta)}\right) = \frac{e^{2\gamma\beta} + e^{\frac{\gamma}{2}}}{e^{2\gamma\beta} - 1}.$$

Nun ist $2\beta > 1$ für die Knotenlagen (vgl. (50)), daher ist

$$\text{Max. } A_{\text{I}} > \text{Max. } A_{\text{II}}.$$

Ausserdem ist, zumal für die weiteren Knotenlagen, wo β grössere Werthe annimmt, das Zeitintervall I (vgl. (47)) grösser, als das Zeitintervall II (vgl. (48)). Das Leuchten einer Vacuumröhre, die an dem betrachteten Punkte $\mathfrak{P}$ aufgestellt ist, wird also wesentlich von dem Werthe des Max. A_{I} abhängen, dem absoluten Maximum. Wir wollen dieses jetzt kurz als Knotenstärke K bezeichnen, und erhalten also:

$$K = \left(1 + e^{-\frac{\gamma}{2}}\right)\frac{e^{2\gamma\beta}}{e^{2\gamma\beta} - 1}. \tag{63}$$

Da nach pag. 76 für die Knoten näherungsweise, wenn $\varphi = 0$ gesetzt wird, 2β die Werthe hat:

$$2\beta = 1, 2, 3, \cdots k \cdots,$$

o ist also die Stärke des k^{ten} Knotens:

$$K_k = \left(1 + e^{-\frac{\gamma}{2}}\right)\frac{e^{k\gamma}}{e^{k\gamma} - 1} = \frac{1 + e^{-\frac{\gamma}{2}}}{1 - e^{-k\gamma}}. \tag{63'}$$

Für die Bauchlagen wird nach (62):

$${}_{\text{I}}A = \frac{e^{2\gamma\beta}}{e^{2\gamma\beta} + 1}\left\{(-1)^h\left(1 + e^{-\frac{\gamma}{2}}\right) - g^{-h}\left(e^{-\frac{\gamma}{2}} - e^{-2\gamma\beta}\right)\right\},$$

$${}_{\text{II}}A = \frac{e^{2\gamma\beta}}{e^{2\gamma\beta} + 1}\left\{e^{\gamma(\frac{1}{2} - 2\beta)} - 1\right\}\left\{(-1)^h + g^{-(h+1)}\right\}.$$

Da stets $e^{-\frac{\gamma}{2}} > e^{-2\gamma\beta}$, so nimmt ${}_{\text{I}}A$ den absoluten grössten Werth an für $h = 1$ und wird dann

$$\text{Max.}\ {}_{I}A = -\frac{e^{2\gamma\beta}}{e^{2\gamma\beta}+1}\left[1 + e^{-\frac{\gamma}{2}} + e^{-2\gamma\beta}\left(e^{-\frac{\gamma}{2}} - e^{-2\gamma\beta}\right)\right].$$

Dagegen nimmt ${}_{II}A$ den absoluten grössten Werth an für $h = 0$ und wird

$$\text{Max.}\ {}_{II}A = -\frac{e^{2\gamma\beta}}{e^{2\gamma\beta}+1}\left(1 - e^{\gamma(\frac{1}{2}-2\beta)}\right)\left(1 + e^{-2\gamma\beta}\right).$$

Auch hier ergiebt sich, dass stets ist

$$\text{Max.}\ {}_{I}A > \text{Max.}\ {}_{II}A.$$

Das absolute Maximum für die Bauchlagen der Brücke B_2 (sie möge Bauchstärke B genannt werden), ist also (auf das Vorzeichen kommt es nicht an):

$$(64)\qquad B = e^{-\frac{\gamma}{2}} + \frac{e^{2\gamma\beta} + e^{-2\gamma\beta}}{e^{2\gamma\beta}+1} = 1 + e^{-\frac{\gamma}{2}} - e^{-2\gamma\beta}.$$

Da nach pag. 77 für die Bäuche näherungsweise, wenn $\varphi = 0$ gesetzt wird, 2β die Werthe hat:

$$2\beta = \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{2}, \cdots k + \tfrac{1}{2} \cdots,$$

so ist also die Stärke des k^{ten} Bauches:

$$(64')\quad B_k = 1 + e^{-\frac{\gamma}{2}} - e^{-\frac{\gamma}{2}} \cdot e^{-k\gamma} = 1 + e^{-\frac{\gamma}{2}}\left(1 - e^{-k\gamma}\right).$$

Ob die in $\mathfrak{P}$ aufgestellte Vacuumröhre nicht leuchtet, wird davon abhängen, dass die Bauchstärke B einen gewissen Betrag, der grade zum Einsetzen des Leuchtens der Röhre genügt, nicht überschreitet.

Die Anzahl der durch Verschiebung der Brücke B_2 beobachtbaren Knoten und Bäuche auf dem Drahtsystem ergiebt sich aus demjenigen Werthe von k, für welchen die Knotenstärke K_k um einen gewissen Procentsatz, der von der Empfindlichkeit des Wellenindicators (der Vacuumröhre) abhängt, grösser ist, als die Bauchstärke B_k. — Man erkennt aus den Formeln (63) und (64), dass für sehr grosse Werthe von β sowohl K wie B sich dem Werthe $1 + e^{-\frac{\gamma}{2}}$ nähern, und dass dieses um so eher eintritt, je grösser die zeitliche Dämpfung γ ist. Je kleiner diese Dämpfung γ ist, um so grösser wird die Anzahl $\bar{k}$ der beobachtbaren Knoten und Bäuche; man kann nach diesen Betrachtungen nicht quantitativ genau, aber wohl schätzungsweise γ aus $\bar{k}$ finden.

In folgender Tabelle stelle ich die nach (63) und (64) berechneten Knoten- bezw. Bauchstärken für verschiedene Werthe von γ zusammen.

Knoten- und Bauchstärken für verschiedene zeitliche Dämpfung.

$\gamma = 0{,}4$:

Knoten	1		2		3		4		5		6		7		8	
Bäuche		1		2		3		4		5		6		7		8
K	5,52		3,32		2,60		2,27		2,10		2,00		1,94		1,90	
B		1,27		1,45		1,57		1,66		1,71		1,75		1,77		1,80

$\gamma = 0{,}2$:

Knoten	1		2		3		4		5		6		7		8	
Bäuche		1		2		3		4		5		6		7		8
K	10,50		5,76		4,21		3,46		3,00		2,72		2,52		2,38	
B		1,16		1,29		1,40		1,49		1,57		1,63		1,68		1,72

Bei sehr kleinen Werthen von γ kann man für die anfänglichen Knoten und Bäuche $e^{k\gamma} = 1 + k\gamma$ setzen. Dann wird (63′) und (64′):

$$K_k = \frac{2}{k\gamma}, \quad B_k = 1 + k\gamma. \tag{65}$$

Der Index k bezeichnet die Ordnungszahl des Knotens bezw. Bauches.

Bei einiger Empfindlichkeit des Wellenindicators und geringen Werthen von γ müssen sehr viele Knoten und Bäuche zu beobachten sein. So wäre für $\gamma = 0{,}10$ und $k = 30$:

$$K_{30} = 2{,}11; \quad B_{30} = 1{,}95.$$

Es müssten also 30 Knoten zu constatiren sein, wenn der Wellenindicator einen Unterschied von 10% in den Amplituden erkennen lässt. — Für $\gamma = 0{,}05$ würde folgen:

$$K_{30} = 2{,}57; \quad B_{30} = 1{,}78.$$

Man kann leicht aus der Anzahl $\bar{k}$ der beobachtbaren Knoten die Dämpfung γ berechnen, wenn man die Empfindlichkeit des Wellenindicators kennt. Er möge so empfindlich sein, dass das Verhältniss von K zu B mindestens den Werth $1 + \nu$ haben muss, falls

der Unterschied der Stärke noch gerade wahrgenommen werden kann. ν ist ein quantitatives Maass für die Empfindlichkeit. Dann bestimmt sich γ nach (63') und (64') aus:

$$\frac{K_{\bar{k}}}{B_{\bar{k}}} = \frac{1 + e^{-\frac{\gamma}{2}}}{(1 - e^{-\bar{k}\gamma})\left[1 + e^{-\frac{\gamma}{2}}(1 - e^{-\bar{k}\gamma})\right]} = 1 + \nu . \tag{66}$$

Hieraus ist γ zu berechnen. Wenn die Empfindlichkeit bedeutend ist, so ist ν so klein, dass man ν^2 gegen 1 vernachlässigen kann. Mit ν ist die Zahl $e^{-\bar{k}\gamma} = \mu$ von gleicher Grössenordnung, wie aus (66) folgt. Man kann daher auch μ^2 gegen 1 vernachlässigen. Es ergiebt sich dann aus (66):

$$e^{-\bar{k}\gamma}\frac{1 + 2e^{-\frac{\gamma}{2}}}{1 + e^{-\frac{\gamma}{2}}} = \nu , \tag{66'}$$

oder näherungsweise, da γ meist klein ist, falls man $\frac{\gamma}{4}$ gegen 3 vernachlässigt:

$$\tfrac{3}{2}e^{-\bar{k}\gamma} = \nu ,$$

$$\gamma = \frac{-\lg\text{nat}\,\frac{2}{3}\nu}{\bar{k}} . \tag{66''}$$

Nun war für die von mir in den eingangs citirten Arbeiten gewählte Versuchsanordnung $\bar{k} = 31$. Nimmt man $\bar{k} = 30$ an, um ganz sicher zu sein, so folgt:

für $\nu = 1\% = 0{,}01 : \gamma = 0{,}167$
$\nu = 2\% = 0{,}02 : \gamma = 0{,}144$
$\nu = 3\% = 0{,}03 : \gamma = 0{,}131$
$\nu = 4\% = 0{,}04 : \gamma = 0{,}121$
$\nu = 5\% = 0{,}05 : \gamma = 0{,}113$
$\nu = 10\% = 0{,}10 : \gamma = 0{,}090$

Wie man hieraus ersieht, ändert sich γ nur wenig mit ν, und man könnte schon hiernach γ zwischen den Grenzen 0,1 und 0,2 bestimmt ansehen.

Wenn jedoch ein solcher Schluss auf γ aus der Anzahl $\bar{k}$ der beobachtbaren Knoten zulässig sein soll, so müssen die bisherigen Betrachtungen vervollständigt werden, da bei grossem β der galvanische Widerstand der Paralleldrähte zu berücksichtigen ist. Es ergiebt sich aus ihm eine örtliche Dämpfung (Absorption) der Wellen.

Weiter unten soll der Einfluss des galvanischen Widerstandes mit berücksichtigt werden. Zunächst aber mögen noch zwei andere Dinge besprochen werden.

4) Einfluss des Wellenindicators.

In den bisherigen Betrachtungen wurde angenommen, dass der Wellenindicator (die Vacuumröhre) die Wellen gar nicht störe. Streng genommen kann das nie der Fall sein, denn ein geringer Theil der Energie der Wellen geht nothwendig auf den Indicator über, wenigstens wenn man nicht gerade, wie in den Bauchlagen der Brücke B_2, das Fehlen der Wellenanzeige benutzen will. Bei den Wellenindicatoren, welche, wie die hier angewandte Zehnder-sche Röhre (ebenso ein angelegtes Elektrometer, oder Bolometer mit Rubens'schen Flaschen) auf die elektrische Kraft ansprechen, äussert sich ihr Einfluss dadurch, dass an der Stelle ihres Anlegens eine gewisse Capacität an die Paralleldrähte geschaltet ist. Man kann den Einfluss einer solchen berechnen. Die Capacität bewirkt, dass die erste Knotenlage der Brücke B_2 noch näher an die feste Brücke B_1 heranrückt. Durch eine solche Beobachtung hat man daher ein Mittel, die Grösse der Beeinflüssung der Wellen durch den Wellenindicator festzustellen. Bei der als Resonator gebrauchten Zehnder'schen Röhre, welche mit allen Theilen um mindestens mehrere mm von den Paralleldrähten entfernt war, war dieser Einfluss sehr gering, die Entfernung der ersten Knotenlage der Brücke B_2 von der Brücke B_1 war nahezu gleich $\frac{1}{2}\lambda$, vermindert um die doppelte Brückenverkürzung. Im Folgenden ist daher eine etwaige Beeinflussung der Wellen durch den Indicator nicht weiter berücksichtigt. — Es ist eben beim Gebrauch einer Vacuumröhre sehr günstig, dass die Leuchterscheinung wenig Energie verbraucht; bei Anwendung eines, selbst möglichst klein construirten Elektrometers ist eine viel grössere Capacität an die Drähte angelegt und die Beeinflussung der Wellen nicht zu vernachlässigen.

5) Oberschwingungen des Erregers.

Es ist eine oft discutirte Streitfrage, ob ein Hertz'scher Erreger Wellen von einheitlicher Periode aussendet oder nicht. Letzteres

glaubten Sarasin und de la Rive[1]) annehmen zu müssen, um die Erscheinung der multiplen Resonanz zu erklären, d. h. des Umstandes, dass verschiedene Resonatoren, die von demselben Erreger erregt werden, Schwingungsdauern aufweisen, welche sich fast nur nach den Abmessungen des jeweiligen Resonators richten, während Poincaré[2]) und Bjerkness[3]) darauf hingewiesen haben, dass die Erscheinung der multiplen Resonanz erklärt werden kann durch die Annahme, dass der Erreger eine Schwingung von einheitlicher Periode entsendet, die aber viel stärker gedämpft ist, als die Resonatorschwingung. In der That kann man ja auch mit Hülfe der Darstellung durch eine Fourier'sche Reihe eine Schwingung der Form $e^{-\gamma\frac{t}{T}}\cos 2\pi\frac{t}{T}$ als eine Superposition von ungedämpften Schwingungen continuirlich verschiedener Perioden und Amplituden auffassen. — Durch die von mir ausgeführten Versuche[4]) lässt sich nun, wie ich glaube, die Poincaré-Bjerkness'sche Ansicht dahin ergänzen[5]), dass der Erreger zwar nicht continuirlich verschiedene Perioden entsendet, aber wohl eine Reihe harmonischer Obertöne besitzt, sodass seine Schwingung mathematisch darstellbar ist als:

$$P = A_1\cdot e^{-\gamma\frac{t}{T}}\cos 2\pi\frac{t}{T} + A_2\cdot e^{-2\gamma'\frac{t}{T}}\cos 2\pi\left(\frac{t}{\frac{1}{2}T}+\delta'\right)$$
$$+ A_3\cdot e^{-3\gamma''\frac{t}{T}}\cos 2\pi\left(\frac{t}{\frac{1}{3}T}+\delta''\right)+\cdots$$

Denn wenn der Wellenindicator[6]) um $\frac{1}{2}\lambda$ hinter der festen Brücke B_1 angebracht wurde, so zeigte die Brücke B_2 Knotenlagen nahezu bei $2\beta = \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$; falls der Wellenindicator bei $\frac{1}{12}\lambda'$ hinter B_1 angebracht wurde, so waren die Knotenlagen von B_2: $2\beta = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \ldots$. Dies wäre nicht möglich, wenn der Erreger nur gedämpfte Schwin-

---

1) Sarasin et de la Rive, Arch. de Genève (3) **23**, p. 113, 1890.

2) H. Poincaré, Arch. de Genève (3) **25**, p. 609, 1891. — Elektricität und Optik, deutsch von Jäger und Gumlich, Berlin 1891, II. Bd. Note V, p. 201.

3) V. Bjerkness, Wied. Ann. **44**, p. 92, 1891. — **54**, p. 58, 1895.

4) P. Drude, Ber. d. sächs. Ges. d. Wiss. math.-phys. Kl. 1895, p. 332. — Wied. Ann. **55**, p. 636, 1895. — »Arbeit I«, p. 13.

5) Diese Ergänzung ist von Bjerkness selbst in Wied. Ann. **54**, p. 61, 1895 als möglich hingestellt.

6) Er wurde als Vacuumröhre ohne Resonanz verwendet.

gungen der Periode T entsendet. Er muss auch Schwingungen der Periode $\frac{1}{2} T$, $\frac{1}{3} T$ entsenden. Diese Schwingungen nehmen bei der von mir gewählten Form des Erregers sehr schnell an Intensität ab, sie lassen sich nur durch Zuhülfenahme längerer[1]) Brücken B_1 beobachten und über die zweite Oberschwingung hinaus habe ich bisher nicht beobachten können. Deshalb brauchen sie bei unseren Betrachtungen nicht weiter berücksichtigt zu werden, zumal noch der günstige Umstand hinzukommt, dass bei der gewählten Lage des Wellenindicators ($\frac{1}{4}\lambda$ hinter B_1) der erste Oberton gar nicht auf den Indicator wirken kann, da für ihn der Indicator in einem Knoten elektrischer Kraft liegt.

B. Berücksichtigung des Leitungswiderstandes der Drähte.

1) Integration der Differentialgleichungen.

Den Ausgangspunkt bildet die Gleichung (6) auf pag. 65, in welcher für w der Widerstand der Längeneinheit der Drähte einzusetzen ist. Dabei ist zu berücksichtigen, dass derselbe für schnelle Schwingungen höher ist, als für constante Ströme, da sich erstere vorzugsweise nach der Oberfläche des Drahtes zusammendrängen. Nach den Entwickelungen von Rayleigh[2]) und Stefan[3]) ist

$$w = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{1}{\sigma T}} \tag{67}$$

für einen sehr schnellen Wechselstrom der Periode T. Dabei bedeutet R den Radius des Drahtes, d. h. seine halbe Dicke, σ seine specifische Leitfähigkeit gemessen nach absolutem elektromagnetischem Maasse. ($\sigma = 1{,}063 \,.\, 10^{-5}$ für Quecksilber.)

Setzt man daher

$$\frac{1}{2R \lg \frac{d}{R} \sqrt{\sigma T}} = \psi,$$

so wird die Differentialgleichung (6):

---

1) Aus dem oben p. 71 erörterten Grunde wird die Intensität grösser, je länger die Brücke B_1 ist.

2) Lord Rayleigh, Phil. Mag. (5) 21, p. 369, 1886.

3) J. Stefan, Wied. Ann. 41, p. 421, 1890. Vgl. auch das Buch »Physik d. Äthers« vom Verf. p. 244, 388.

(68) $$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + \psi \frac{\partial i}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 i}{\partial z^2}.$$

Das Integral derselben lautet für periodische gedämpfte Schwingungen, d. h. wenn

$$i = e^{\alpha \frac{t}{T}} f(z):$$

(69) $$i = A_1 \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} - \alpha' \frac{z}{\lambda}} + A_2 \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} + \alpha' \frac{z}{\lambda}},$$

wobei $\lambda = cT$, $\alpha'^2 = \alpha^2 + \psi \alpha T$ ist.

α' ist also bestimmt durch

(69′) $$\alpha' = \alpha \sqrt{1 + \frac{\psi T}{\alpha}}.$$

Nun ist zu berücksichtigen, dass der Modul der complexen Grösse $\psi T : \alpha$ klein gegen 1 ist. So ist z. B. bei den von mir angestellten Versuchen, die mit Kupferdrähten ($\sigma = 60 . 10^{-5}$) von $R = \frac{1}{2}$ mm und der Distanz $d = 1{,}8$ cm bei $\lambda = 75$ cm, d. h. $T = 25 . 10^{-10}$ angestellt sind:

$$\psi T = 0{,}0057.$$

Das Quadrat dieser Grösse ist sehr klein gegen den Modul von α, d. h. $\gamma^2 + 4\pi^2$. Man kann daher (69′) schreiben als

(69″) $$\alpha' = \alpha + \frac{\psi T}{2} = \alpha + \tau.$$

Daher ist das Integral von (68):

(70) $$\begin{cases} i = A_1 \cdot e^{\alpha\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda}\right)} \cdot e^{-\tau \frac{z}{\lambda}} + A_2 \cdot e^{\alpha\left(\frac{t}{T} + \frac{z}{\lambda}\right)} \cdot e^{+\tau \frac{z}{\lambda}}, \\ \text{wobei ist:} \\ \tau = \dfrac{\sqrt{T}}{4R \lg \frac{d}{R} \sqrt{\sigma}}. \end{cases}$$

Für meine Versuche ist $\tau = 0{,}00285$. Der erste Term in (70) entspricht Wellen, die sich nach der positiven z-Axe fortpflanzen, der zweite Wellen, die sich nach der negativen z-Axe fortpflanzen. Man erkennt aus (70), dass die Wellen einer örtlichen Dämpfung (Absorption) unterliegen, die zu τ proportional ist. Dies ist der einzige Einfluss des galvanischen Widerstandes der Drähte, die Wellenlänge λ bleibt von ihm unbeeinflusst, so lange der Widerstand so gering ist, d. h. die Drähte eine so hohe specifische

Leitfähigkeit besitzen, dass τ klein ist gegen α. Bei allen Versuchen, bei denen schnelle Schwingungen in Kupferdrähten fortgeleitet werden, ist diese Bedingung erfüllt. — Man erkennt zugleich aus (69'), dass für wesentliche grössere Drahtwiderstände, bei denen

$$\sqrt{1+\frac{\psi T}{\alpha}} \text{ nicht gleich } 1+\frac{\psi T}{2\alpha} \text{ zu setzen ist,}$$

α' sich auch im imaginären Bestandtheil von α unterscheiden würde. Dies würde aber eine Aenderung der Wellenlänge der Schwingungen bedeuten, und zwar würde, wie eine nähere einfache Untersuchung ergiebt, die Wellenlänge durch Vorhandensein eines starken galvanischen Drahtwiderstandes verkleinert.

Wir müssen jetzt alle unsre bisherigen Rechnungen einer Revision unterwerfen, inwieweit sie durch die Existenz des Widerstandes, d. h. der Grösse τ, modificirt werden.

2) Reflexion und Übergang von Wellen an einer Brücke.

Die Brückenbedingungen (14) und (15) (pag. 67) bleiben natürlich hier erhalten, nur wird die erste Brückenbedingung (13), die aus der Gleichung (8) floss, unter Berücksichtigung des endlichen galvanischen Widerstandes w' der Brücke:

$$(71) \qquad i'w' + Ll\frac{\partial i'}{\partial t} = 4c\,\mathfrak{e}\lg\frac{d}{R}.$$

Dabei bezeichnet w' den Widerstand der Brücke. Ist dieselbe von Draht des Radius R' gebildet, so ist für Schwingungen gemäss (67), da sich w' nicht auf die Längeneinheit beziehen sollte:

$$w' = \frac{l}{R'\sqrt{\sigma' T}}.$$

σ' ist die specifische Leitfähigkeit des Materials der Brücke.

Gemäss (69) schreiben wir die elektrische Ladung $\mathfrak{e}_e$ der einfallenden Welle in der Form:

$$\mathfrak{e}_e = \alpha' A \cdot e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha'\frac{x}{\lambda}},$$

$\alpha' A$ würde die Amplitude der einfallenden Ladungswelle sein. Infolge der Gleichung (5) (pag. 65), welche natürlich bestehen bleibt, ergiebt sich die einfallende Stromwelle zu

$$\overset{\cdot}{i}_e = \alpha A \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} - \alpha' \frac{z}{\lambda}}.$$

Durch Reflexion an der Brücke möge der complexe Reflexionsfactor r entstehen (der oben auf pag. 68 in der Form $A_r \,.\, e^{\alpha \Delta}$ geschrieben ist). Dann ist die reflectirte Ladungswelle:

$$\mathfrak{e}_r = (\alpha' A)\; r \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} + \alpha' \frac{z}{\lambda}},$$

die reflectirte Stromwelle nach (5):

$$\overset{\cdot}{i}_r = -\; (\alpha A)\; r \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} + \alpha' \frac{z}{\lambda}}.$$

Schliesslich sollen die über die Brücke weitergehenden Wellen in der Form geschrieben werden:

$$\mathfrak{e}'' = (\alpha' A)\; \delta \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} - \alpha' \frac{z}{\lambda}}$$

$$\overset{\cdot}{i}'' = (\alpha A)\; \delta \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} - \alpha' \frac{z}{\lambda}}.$$

Die Gleichung (15) $\mathfrak{e} = \mathfrak{e}_e + \mathfrak{e}_r = \mathfrak{e}''$ für $z = b = \beta \lambda$ ergiebt:

$$e^{-\alpha' \beta} + r \cdot e^{+\alpha' \beta} = \delta \cdot e^{-\alpha' \beta},$$

die Gleichung (14) $\overset{\cdot}{i}' = \overset{\cdot}{i} - \overset{\cdot}{i}''$ für $z = \beta \lambda$:

$$\overset{\cdot}{i}' = \alpha A \left(e^{-\alpha' \beta} - r \cdot e^{+\alpha' \beta} - \delta \cdot e^{-\alpha' \beta}\right) \cdot e^{\alpha \frac{t}{T}},$$

d. h. wenn man $\delta \,.\, e^{-\alpha' \beta}$ mit Hülfe der vorigen Gleichung eliminirt:

$$\overset{\cdot}{i}' = -\; 2 r \cdot \alpha A \cdot e^{+\alpha' \beta} \cdot e^{\alpha \frac{t}{T}}.$$

Die Brückenbedingung (71) ergiebt daher:

$$- w' \cdot 2 r \alpha \cdot e^{+\alpha' \beta} - L l \cdot 2 r \alpha \cdot \frac{\alpha}{T} \cdot e^{+\alpha' \beta} = 4 c \lg \frac{d}{R}\, \alpha' \left(e^{-\alpha' \beta} + r \cdot e^{+\alpha' \beta}\right).$$

Dividirt man diese Gleichung durch $4 c \lg \frac{d}{R}$, setzt nach (69) $\lambda = c T$, ferner nach (30) $\zeta = L : 2 \lg \frac{d}{R}$, führt schliesslich für w' seinen oben angegebenen Werth ein, und setzt

$$\tau' = \frac{\sqrt{T}}{4 R' \lg \frac{d}{R} \sqrt{\sigma'}},$$

so entsteht:

$$-r\cdot e^{+\alpha'\beta}\cdot\alpha\left(2\tau'\frac{l}{\lambda}+\alpha\,\zeta\frac{l}{\lambda}\right)=\alpha'\left(e^{-\alpha'\beta}+r\cdot e^{+\alpha'\beta}\right)$$

oder:

$$r\cdot e^{+\alpha'\beta}\left(\alpha'+\alpha\cdot\alpha\zeta\frac{l}{\lambda}+\alpha\cdot 2\tau'\frac{l}{\lambda}\right)=-\alpha'\cdot e^{-\alpha'\beta}.$$

Nun ist $\frac{l}{\lambda}$ eine kleine Grösse (z. B. bei $l = 1{,}8$ cm, $\lambda = 75$ cm, wie es bei den Versuchen vorlag, ist $l:\lambda = 0{,}024$). Daher ist es durchaus unbedenklich, für $\alpha\,.\,\alpha\zeta\,\frac{l}{\lambda}$ zu schreiben $\alpha'\,.\,\alpha\zeta\,\frac{l}{\lambda}$, da α' nach (69″) sich von α nur um die kleine Grösse τ unterscheidet. Das dritte Glied in der Klammer auf der linken Seite obiger Gleichung ist aber unbedenklich fortzulassen, da es das Product zweier kleiner Grössen, nämlich τ' und $\frac{l}{\lambda}$, ist. Daher wird schliesslich:

$$r=-\frac{e^{-2\alpha'\beta}}{1+\alpha\zeta\frac{l}{\lambda}}. \tag{72}$$

Ein Vergleich dieser Formel mit der oben auf pag. 69 ohne Berücksichtigung des galvanischen Drahtwiderstandes für r abgeleiteten Formel (28) lehrt, dass in beiden Formeln nur der Exponent von e verschieden ist. Er ist nämlich hier: $-2\alpha'\beta$, während er dort $-2\alpha\beta$ war. Der Widerstand w' der Brücke kommt also gar nicht in Betracht, selbst wenn der der Drähte berücksichtigt wird.

Unter Benützung der oben durch (31) oder (33) definirten Hilfsgrössen ϱ und φ wird also jetzt:

$$r=-\varrho\cdot e^{-\alpha\varphi-2\alpha'\beta}. \tag{72'}$$

Wie leicht zu ersehen ist, bleibt δ gegen früher unverändert, [vgl. die frühere Formel (29)].

3) Vorhandensein zweier Brücken.

Die früher angestellten Betrachtungen lassen sich leicht modificiren. Es treten zwei Reflexionsfactoren auf: r an der Brücke B_2, wobei dann der Werth (72′) zu benutzen ist an Stelle des früheren (40), und der Factor r' an der Brücke B_1, der denselben Werth, wie in (42) besitzt, nämlich:

$$r'=-\varrho e^{-\alpha\varphi}. \tag{73}$$

Bei Benutzung der gleichen Bezeichnungen, wie oben auf pag. 75, wird jetzt [vgl. die dortigen Formeln (39), (41), (43), (44)]:

$$(74)\qquad \begin{aligned} P_1 &= e^{\alpha\frac{t}{T}-\alpha' p} && \text{von } t = pT \text{ bis } t = \infty,\\ P_2 &= r\cdot e^{\alpha\frac{t}{T}+\alpha' p} && \text{von } t = (2\beta - p)T \text{ bis } \infty,\\ P_3 &= rr'\cdot e^{\alpha\frac{t}{T}-\alpha' p} && \text{von } t = (2\beta + p)T \text{ bis } \infty,\\ P_4 &= r^2 r'\cdot e^{\alpha\frac{t}{T}+\alpha' p} && \text{von } t = (4\beta - p)T \text{ bis } \infty,\\ & && \text{etc. etc.} \end{aligned}$$

Für die gesammte elektrische Kraft erhält man daher folgenden Verlauf [vgl. die früheren Formeln (45)]:

$$p<\frac{t}{T}<2\beta-p: P=e^{\alpha\frac{t}{T}}\cdot e^{-\alpha' p},$$

$$2\beta-p<\frac{t}{T}<2\beta+p: P=e^{\alpha\frac{t}{T}}\cdot\left\{e^{-\alpha' p}+r\cdot e^{+\alpha' p}\right\},$$

$$2\beta+p<\frac{t}{T}<4\beta-p: P=e^{\alpha\frac{t}{T}}\cdot\left\{e^{-\alpha' p}(1+rr')+r\cdot e^{+\alpha' p}\right\},$$

$$(75)\qquad 4\beta-p<\frac{t}{T}<4\beta+p: P=e^{\alpha\frac{t}{T}}\cdot\left\{e^{-\alpha' p}(1+rr')+r\cdot e^{+\alpha' p}(1+rr')\right\},$$

. . . .

$$2h\beta+p<\frac{t}{T}<2(h+1)\beta-p:$$

$$P=e^{\alpha\frac{t}{T}}\left\{e^{-\alpha' p}\left[1+rr'+(rr')^2+\cdots+(rr')^h\right]+r\cdot e^{+\alpha' p}\left[1+rr'+(rr')^2+\cdots+(rr')^{h-1}\right]\right\},$$

$$2(h+1)\beta-p<\frac{t}{T}<2(h+1)\beta+p:$$

$$P=e^{\alpha\frac{t}{T}}\left\{e^{-\alpha' p}+r\cdot e^{+\alpha' p}\right\}\cdot\left\{1+rr'+(rr')^2+\cdots+(rr')^h\right\}.$$

Die Summation liefert für das erste Zeitintervall I:

$$(76)\qquad P_{\mathrm{I}} = \frac{e^{\alpha\frac{t}{T}}\cdot e^{-\alpha' p}}{rr'-1}\left\{(rr')^{h+1}-1+r\cdot e^{2\alpha' p}\left[(rr')^h-1\right]\right\},$$

für das zweite Zeitintervall:

$$(77)\qquad P_{\mathrm{II}} = \frac{e^{\alpha\frac{t}{T}}\cdot e^{-\alpha' p}}{rr'-1}\left(1+r\cdot e^{2\alpha' p}\right)\left((rr')^{h+1}-1\right).$$

Dabei ist nach (72') und (73):

$$(78)\qquad rr' = \varrho^2\cdot e^{-2\alpha\varphi-2\alpha'\beta} = \varrho^2\cdot e^{2\gamma(\varphi+\beta)-2\iota\beta}\cdot e^{-4\pi(\varphi+\beta)\sqrt{-1}}.$$

Maxima der P ergeben sich für diejenigen Brückenlagen β, für welche rr' reell und positiv ist (Knotenlagen), Minima für diejenigen β, für welche rr' reell und negativ ist (Bauchlagen). Wie aus (78) hervorgeht, stimmen die Knoten- und Bauchlagen mit den früher durch die Formeln (50) und (52) bestimmten überein. Es tritt aber hier an Stelle der früheren Formeln (54):

$$
(79) \qquad \begin{aligned} rr' &= +\,\varrho^2 \cdot e^{2\gamma(\varphi+\beta)} \cdot e^{-2\iota\beta} \quad \text{für Knoten,} \\ rr' &= -\,\varrho^2 \cdot e^{2\gamma(\varphi+\beta)} \cdot e^{-2\iota\beta} \quad \text{für Bauch.} \end{aligned}
$$

Nach (72') und (78) ist ferner:

$$
r = -\,\varrho \cdot e^{2\gamma(\varphi+\beta)-2\iota\beta} \cdot e^{\alpha\varphi} = -\,\varrho \cdot e^{\gamma(\varphi+2\beta)-2\iota\beta} \cdot e^{i2\pi\varphi} \quad \text{für Knoten,}
$$

$$
r = +\,\varrho \cdot e^{\gamma(\varphi+2\beta)-2\iota\beta} \cdot e^{i2\pi\varphi} \quad \text{für Bauch.}
$$

Daher wird

$$
r \cdot e^{2\alpha' p} = \mp\,\varrho \cdot e^{\gamma(\varphi+2\beta-2p)+2\iota(p-\beta)} \cdot e^{i2\pi(\varphi+2\pi)}.
$$

Gerade wie oben [vgl. Formel (61)] gezeigt wurde, sind die Maxima von P für diejenigen Punkte $\mathfrak{P}(p)$ zu erwarten, für welche

$$
e^{i2\pi(\varphi+2p)} = -1,
$$

d. h.

$$
(80) \qquad 2p = \tfrac{1}{2} - \varphi
$$

ist. Dann wird also

$$
(81) \qquad r \cdot e^{2\alpha' p} = \pm\,\varrho \cdot e^{\gamma(2\varphi+2\beta-\frac{1}{2})} \cdot e^{\iota(\frac{1}{2}-\varphi-2\beta)}.
$$

Es ergiebt sich gerade wie oben, dass in dem (zugleich länger dauernden) Zeitintervall I die absoluten Maxima der P liegen. Für diese folgt daher aus (76), (79), (81):

für Knoten:

$$
(82) \qquad P_1 = e^{-\gamma\frac{t}{T}} \cdot e^{(\gamma-\iota)p} \cdot
$$

$$
e^{i2\pi\left(\frac{t}{T}-p\right)} \frac{\left[\varrho^2 \cdot e^{2\gamma(\varphi+\beta)-2\iota\beta}\right]^{h+1} - 1 + \varrho \cdot e^{\gamma(2\varphi+2\beta-\frac{1}{2})+\iota(\frac{1}{2}-\varphi-2\beta)} \left\{\left[\varrho^2 \cdot e^{2\gamma(\varphi+\beta)-2\iota\beta}\right]^h - 1\right\}}{\varrho^2 \cdot e^{2\gamma(\varphi+\beta)} \cdot e^{-2\iota\beta} - 1},
$$

für Bauch:

$$
(83) \qquad {}_1P = e^{-\gamma\frac{t}{T}} \cdot e^{(\gamma-\iota)p} \cdot
$$

$$
e^{i2\pi\left(\frac{t}{T}-p\right)} \frac{(-1)^h\left[\varrho^2 \cdot e^{2\gamma(\varphi+\beta)-2\iota\beta}\right]^{h+1} + 1 + \varrho \cdot e^{\gamma(2\varphi+2\beta-\frac{1}{2})+\iota(\frac{1}{2}-\varphi-2\beta)} \left\{(-1)^h\left[\varrho^2 \cdot e^{2\gamma(\varphi+\beta)-2\iota\beta}\right]^h - 1\right\}}{\varrho^2 \cdot e^{2\gamma(\varphi+\beta)} \cdot e^{-2\iota\beta} + 1}.
$$

Führt man wiederum für dieses Zeitintervall I wie nach (55) ein

$$\frac{t}{T} = 2h\beta + p + \eta\,,$$

so wird, wenn man von dem unwesentlichen[1]) Factor $e^{-\gamma\eta - \tau p}$ absieht, und die Abkürzungen einführt [vgl. die früheren Formeln (57)]:

$$(84) \qquad \varrho^2 \cdot e^{2\gamma\varphi} = f, \quad f \cdot e^{-2\tau\beta} = f', \quad e^{2\gamma\beta} = g\,,$$

die Amplitude in den Knoten:

$$(85) \quad A_1 = \frac{g}{f'g - 1}\left\{f'^{h+1} - g^{-(h+1)} + [f'^h - g^{-h}]\frac{f'}{\varrho}\cdot e^{-\frac{\gamma}{2} + 2p\tau}\right\},$$

die Amplitude in den Bäuchen:

$$(86) \quad {}_1A = \frac{g}{f'g + 1}\left\{(-1)^h f'^{h+1} + g^{-(h+1)} + [(-1)^h f'^h - g^{-h}]\frac{f'}{\varrho}\cdot e^{-\frac{\gamma}{2} + 2p\tau}\right\}.$$

Der Unterschied dieser Formeln gegen die früheren analogen (62) liegt im wesentlichen darin, dass das frühere f hier ersetzt ist durch f'. Dieser Unterschied ist von Wichtigkeit, denn die in den früheren Formeln (63) und (64) erreichte Einfachheit ist dadurch gewonnen, dass man f gleich 1 setzen konnte, und dass dann das Maximum der Amplitude A_1 für $h = \infty$ eintrat. Wie aus (84) hervorgeht, kann man f' für einigermassen grosse β, d. h. für höhere Knotenlagen der Brücke B_2, nicht gleich 1 setzen, sondern f' ist stets kleiner als 1. Daher tritt auch das Maximum von A_1 nicht für $h = \infty$ ein, sondern für eine frühere Zeit, die sich ergiebt, wenn man $\frac{\partial A_1}{\partial h} = 0$ setzt. Der Klammerausdruck in A_1 lässt sich schreiben, wenn man noch für $2p\tau$ schreibt $\frac{\tau}{2}$, was gestattet ist, da $\tau\varphi$ zu vernachlässigen ist (cf. oben pag. 90):

$$f'^{h+1}\left(1 + \frac{e^{\frac{\tau-\gamma}{2}}}{\varrho}\right) - g^{-(h+1)}\left(1 + f'g\frac{e^{\frac{\tau-\gamma}{2}}}{\varrho}\right).$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$(87) \qquad 1 + \frac{e^{\frac{\tau-\gamma}{2}}}{\varrho} = a, \quad 1 + f'g\frac{e^{\frac{\tau-\gamma}{2}}}{\varrho} = a'\,,$$

so ergiebt $\frac{\partial A_1}{\partial h} = 0$ die Gleichung:

$$(88) \qquad a \cdot \lg f' \cdot f'^{h+1} + a' \cdot \lg g \cdot g^{-(h+1)} = 0\,,$$

1) Dieser Factor ist deshalb unwesentlich, weil für Knoten und Bauch das Maximum zu gleicher Zeit η (nahezu $\eta = 0$) erreicht wird.

d. h. wenn man setzt

$$(87') \qquad -\frac{a' \cdot \lg g}{a \cdot \lg f'} = a'',$$

so folgt

$$(89) \qquad h + 1 = \lg a'' : \lg (f'g).$$

Vermöge der Gleichungen (88) und (89) schreibt sich daher das absolute Maximum von A_1, die sogenannte **Knotenstärke**:

$$(90) \qquad K = \frac{g}{f'g - 1}\, a\, f'^{\lg a'' : \lg (f'g)} \cdot \left(1 + \frac{\lg f'}{\lg g}\right).$$

Es ist allerdings zu berücksichtigen, dass h seiner Bedeutung nach eine ganze Zahl ist, während es hier so behandelt ist, als ob es eine continuirlich Veränderliche wäre. Die Formel (90) ist daher nur ein Näherungswerth (der allerdings recht genau ist); wenn man den exacten Werth für K berechnen will, so ist für h diejenige positive ganze Zahl zu wählen, welche dem in Gleichung (89) bestimmten Werthe von h möglichst nahe kommt, und dann mit Hülfe dieses h der Werth von A_1 nach (85) zu berechnen.

Die Amplitude ${}_1A$ der Bauchlage lässt sich schreiben:

$${}_1A = \frac{g}{f'g + 1}\left\{(-1)^h f'^{h+1}\left(1 + \frac{e^{\frac{\tau - \gamma}{2}}}{\varrho}\right) - g^{-h}\left(f' \frac{e^{\frac{\tau - \gamma}{2}}}{\varrho} - \frac{1}{g}\right)\right\}.$$

Da nun $\beta > \frac{1}{2}$, so ist der Factor von g^{-h} positiv. Das absolute Maximum wird also erhalten, wenn $h = 1$ ist. Daher folgt für die **Bauchstärke**:

$$B = \frac{g}{f'g + 1}\left\{f'^2\left(1 + \frac{e^{\frac{\tau - \gamma}{2}}}{\varrho}\right) + \frac{1}{g}\left(f' \frac{e^{\frac{\tau - \gamma}{2}}}{\varrho} - \frac{1}{g}\right)\right\}$$

oder

$$(91) \qquad B = f'\left(1 + \frac{e^{\frac{\tau - \gamma}{2}}}{\varrho}\right) - \frac{1}{g}.$$

Dies wird aber nur richtig sein, wenn f' nicht zu klein ist. Denn wenn f' genügend klein, d. h. $\beta\tau$ genügend gross ist, kann der Werth, den ${}_1A$ für $h = 0$ annimmt, der absolut grösste sein. Dann ist also die Bauchstärke:

$$(91') \qquad B = \frac{g}{f'g + 1}\left\{f' + \frac{1}{g}\right\} = 1.$$

Bei der Discussion der Frage: **Wieviel Knoten bezw. Bäuche lassen sich bei bekannter zeitlicher Dämpfung durch Ver-**

schiebung der Brücke B_2 erkennen? sind wir hier in besserer Lage, als früher, wo wir zur exacten Beantwortung die Empfindlichkeit (ν) des Wellenindicators schätzen mussten. Nach den früheren Betrachtungen war nämlich die Knotenstärke unter allen Umständen, d. h. für alle Werthe von β, grösser als die Bauchstärke; nach den jetzigen Betrachtungen ist das nicht der Fall. Denn wenn β sehr gross ist, so ist die Bauchstärke nach (91') = 1, während die Knotenstärke auch nur den Werth 1 besitzt, indem nämlich die an der Brücke B_2 reflectirten Wellen selbst nach einmaliger Reflexion schon so starke örtliche Dämpfung erlitten haben, dass sie die durch zeitliche Dämpfung herbeigeführte Amplitudenschwächung der einfallenden Wellen nicht zu compensiren vermögen. Wenn ein Knoten noch erkennbar sein soll, so muss offenbar die Knotenstärke $K > 1$ sein, weil er sich sonst vom benachbarten Bauch an Wirkung nicht unterscheiden würde. Hieraus lässt sich eine obere Grenze $\bar{k}$ der Maximalzahl der beobachtbaren Knoten exact bestimmen.

Bei Beantwortung der umgekehrten Frage: Wie bestimmt sich aus der Anzahl $\bar{k}$ wirklich beobachtbarer Knoten die zeitliche Dämpfung γ? kann man eine Schätzung der Empfindlichkeit ν des Wellenindicators auch hier nicht entbehren, weil die thatsächliche Anzahl $\bar{k}$ beobachtbarer Knoten unter jenem soeben erwähnten, theoretisch ohne Kenntniss von ν bestimmten, oberen Grenzwerth $\bar{\bar{k}}$ liegt.

Die Berechnung eines Experimentes soll dies illustriren. Es ist zunächst zu bemerken, dass die Formel (90) wohl anzuwenden ist, wenn f' nahezu gleich 1 ist, d. h. wenn die Brücke B_2 nicht sehr weit (etwa bis 10 halbe Wellenlängen) von B_1 entfernt liegt. Denn dann wird die volle Knotenstärke K erst für grosses h, d. h. zu später Zeit nach Einsetzen des Erregers, erreicht. — Für grosse β, d. h. weite Entfernungen zwischen den Brücken B_2 und B_1, für welche f' merklich kleiner als 1 ist, ist es praktischer, nach den Formeln (75) die P direct für die einzelnen Zeitintervalle zu berechnen, wobei man die Rechnung durch Aufstellung gewisser Recursionsformeln sehr bequem gestalten kann. Dies soll zunächst im Folgenden geschehen, und zwar sollen auch die Bauchlagen in dieser Weise mit behandelt werden, obgleich für sie die Formel (91)

bequem ist. Man gewinnt aber so die beste Anschauung über den zeitlichen Verlauf der P.

Für einen Knoten

$$2\beta = k - 2\varphi, \quad k = 1, 2, \cdots,$$

werden nach (75) die Amplituden der P für die dort angeführten Zeitintervalle, wenn man die Factoren $e^{-\gamma\eta - \tau p}$, bezw. $e^{-\gamma\vartheta - \tau p}$ fortlässt[1], wobei η und ϑ nach den Gleichungen (55), (55') und (56), (56') definirt sind:

$$A_1 = 1,$$

$$A_2 = e^{\varphi\gamma}\left\{e^{-k\gamma}\cdot e^{\frac{\gamma}{2}} + e^{-k\tau}\cdot e^{\frac{\tau}{2}}\cdot\varrho\right\},$$

$$A_3 = e^{2\varphi\gamma}\left\{e^{-k\gamma} + e^{-k\tau}\cdot e^{\frac{\tau}{2}}\cdot\varrho e^{-\frac{\gamma}{2}} + \varrho^2\cdot e^{-k\tau}\right\} = e^{\gamma(\varphi-\frac{1}{2})}\cdot A_2 + e^{-k\tau}\cdot\varrho^2 e^{2\varphi\gamma},$$

$$A_4 = e^{3\varphi\gamma}\left\{e^{-2k\gamma}\cdot e^{\frac{\gamma}{2}} + \varrho\cdot e^{-k\gamma}\cdot e^{-k\tau}\cdot e^{\frac{\tau}{2}} + \varrho^2\cdot e^{\frac{\gamma}{2}}\cdot e^{-k\gamma}\cdot e^{-k\tau} + \varrho^3\cdot e^{-2k\tau} + e^{\frac{\tau}{2}}\right\}$$

$$= e^{\gamma(\varphi+\frac{1}{2})}\cdot e^{-k\gamma}\cdot A_3 + e^{-2k\tau}\cdot e^{\frac{\tau}{2}}\cdot\varrho^3 e^{3\varphi\gamma},$$

$$A_5 = e^{4\varphi\gamma}\left\{e^{-2k\gamma} + \varrho e^{-\frac{\gamma}{2}}\cdot e^{\frac{\tau}{2}}\cdot e^{-k\gamma}\cdot e^{-k\tau} + \varrho^2\cdot e^{-k\gamma}\cdot e^{-k\tau} + \varrho^3\cdot e^{-\frac{\gamma}{2}}\cdot e^{\frac{\tau}{2}}\cdot e^{-2k\tau} + \varrho^4\cdot e^{-2k\tau}\right\}$$

$$= e^{\gamma(\varphi-\frac{1}{2})}\cdot A_4 + \varrho^4\cdot e^{4\varphi\gamma}\cdot e^{-2k\tau},$$

$$A_6 = e^{\gamma(\varphi+\frac{1}{2})}\cdot e^{-k\gamma}\cdot A_5 + e^{-3k\tau}\cdot e^{\frac{\tau}{2}}\varrho^5\cdot e^{5\varphi\gamma},$$

etc. etc.

Setzt man also

$$(92)\qquad \begin{aligned} e^{\gamma(\varphi+\frac{1}{2}-k)} &= m, & e^{\gamma(\varphi-\frac{1}{2})} &= m', \\ \varrho^2\cdot e^{2\varphi\gamma}\cdot e^{-k\tau} &= n, & e^{\frac{\tau}{2}} : \varrho e^{\varphi\gamma} &= n', \end{aligned}$$

so erhält man folgende Recursionsformeln:

$$(93)\qquad \begin{aligned} A_1 &= 1, & A_2 &= m\cdot A_1 + n\cdot n', \\ A_3 &= m'\cdot A_2 + n, & A_4 &= m\cdot A_3 + n^2\cdot n', \\ A_5 &= m'\cdot A_4 + n^2, & A_6 &= m\cdot A_5 + n^3\cdot n', \\ A_7 &= m'\cdot A_6 + n^3, & A_8 &= m\cdot A_7 + n^4\cdot n', \end{aligned}$$

etc. etc.

---

1) Man kann diese Factoren fortlassen, weil η und ϑ für den Maximalwerth der Knoten- und Bauchstärken gleiche Werthe besitzen. cf. oben pag. 93, Anm. 1.

Für einen Bauch ergiebt sich ebenso, da

$$2\beta = k + \tfrac{1}{2} - 2\varphi, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

$$\begin{aligned}
{}_1A &= 1, \\
{}_2A &= e^{\gamma(\varphi - k)} - \varrho e^{\gamma\varphi} \cdot e^{-k\tau}, \\
{}_3A &= e^{\gamma(\varphi - \frac{1}{2})} \cdot {}_2A - \varrho^2 \cdot e^{2\gamma\varphi} \cdot e^{-\frac{\tau}{2}} \cdot e^{-k\tau}, \\
{}_4A &= e^{\gamma(\varphi - k)} \cdot {}_3A + \varrho^3 \cdot e^{3\gamma\varphi} \cdot e^{-\frac{\tau}{2}} \cdot e^{-2k\tau}, \\
{}_5A &= e^{\gamma(\varphi - \frac{1}{2})} \cdot {}_4A + \varrho^4 \cdot e^{4\gamma\varphi} \cdot e^{-\frac{2\tau}{2}} \cdot e^{-2k\tau}, \\
{}_6A &= e^{\gamma(\varphi - k)} \cdot {}_5A - \varrho^5 \cdot e^{5\gamma\varphi} \cdot e^{-\frac{2\tau}{2}} \cdot e^{-3k\tau}, \\
{}_7A &= e^{\gamma(\varphi - \frac{1}{2})} \cdot {}_6A - \varrho^6 \cdot e^{6\gamma\varphi} \cdot e^{-\frac{3\tau}{2}} \cdot e^{-3k\tau},
\end{aligned}$$

etc. etc.

Setzt man also:

$$e^{\gamma(\varphi - k)} = m'', \quad -\varrho^2 \cdot e^{2\varphi\gamma} \cdot e^{-\tau(\frac{1}{2} + k)} = n'', \tag{94}$$

so wird

$$\begin{aligned}
{}_1A &= 1, & {}_2A &= m'' \cdot {}_1A + n'' \cdot n', \\
{}_3A &= m' \cdot {}_2A + n'', & {}_4A &= m'' \cdot {}_3A + n''^2 \cdot n', \\
{}_5A &= m' \cdot {}_4A + n''^2, & {}_6A &= m'' \cdot {}_5A + n''^3 \cdot n', \\
{}_7A &= m' \cdot {}_6A + n''^3, & {}_8A &= m'' \cdot {}_7A + n''^4 \cdot n',
\end{aligned} \tag{95}$$

etc. etc.

Bei meiner Versuchsanordnung[1] waren nun $k = 31$ Knoten beobachtbar, es möge aber nur $k = 30$ gesetzt werden, um sicher zu sein, dass der aus den Resultaten jener Versuche geschätzte Werth von γ nicht zu klein ist. Ferner ist $\tau = 0{,}00285$ (pag. 87), und nach (36) $\varphi = 2\delta b : \lambda = 1{,}6 : 75 = 0{,}0213$. Nach pag. 73 ist $\varrho^2 \cdot e^{2\gamma\varphi} = 1 : 1{,}018$. Dadurch wird nach (92) und (94):

$$\begin{aligned}
m &= e^{-\gamma \cdot 29{,}48}, & m' &= e^{-\gamma \cdot 0{,}48}, \\
n &= 0{,}902, & n' &= 0{,}992, \\
m'' &= e^{-\gamma \cdot 29{,}98}, & n'' &= -0{,}9005.
\end{aligned}$$

Für $\gamma = 0{,}1$ erhält man daher

$$m = 0{,}0524; \; m' = 0{,}9531; \; m'' = 0{,}0499,$$

---

1) Vgl. »Arbeit I«.

und folgenden zeitlichen Verlauf der elektrischen Kraft, wenn sich die Brücke B_2 im 30ten Knoten, bezw. 30ten Bauch befindet:

Knoten:

$A_1 = 1$	$A_2 = 0,947$
$A_3 = 1,804$	$A_4 = 0,900$
$A_5 = 1,670$	$A_6 = 0,814$
$A_7 = 1,508$	$A_8 = 0,735$
$A_9 = 1,361$	$A_{10} = 0,662$

Bäuche:

${}_1A = +1$	${}_2A = -0,843$
${}_3A = -1,703$	${}_4A = +0,719$
${}_5A = +1,495$	${}_6A = -0,648$
${}_7A = -1,346$	${}_8A = +0,584$
${}_9A = +1,222$	${}_{10}A = -0,524$

Es ist also die Knotenstärke:

$$K = 1,804\,,$$

die Bauchstärke

$$B = 1,703\,.$$

Der Unterschied von K und B ist 5,5%. — Während also nach pag. 82 bei ${}_1k = 30$ ohne Berücksichtigung des Drahtwiderstandes und der Schwächung der Amplitude bei der Reflexion an der Brücke der Unterschied von Knoten und Bauch bei $\gamma = 0,10$ etwa 7,5% beträgt, erscheint er auf 5,5% erniedrigt durch Berücksichtigung jener beiden Correctionsgrössen.

Es folgt ferner:

Für $\gamma = 0,2$: $m = 0,00275$; $m' = 0,909$; $m'' = 0,00249$.

Knoten:

$A_1 = 1$	$A_2 = 0,898$
$A_3 = 1,718$	$A_4 = 0,811$
$A_5 = 1,550$	

Bäuche:

${}_1A = 1$	${}_2A = -0,890$
${}_3A = -1,709$	

$$K = 1,718\,;\quad B = 1,709\,;\quad \frac{K-B}{K} = 0,5\,\%\,.$$

Für $\gamma = 0{,}3$ folgt $m' = 0{,}866$,

$$K = 1{,}677, \quad B = 1{,}674, \quad \frac{K-B}{K} = 0{,}18\,\% .$$

Hieraus ergiebt sich, dass $\gamma = 0{,}3$ entschieden zu gross ist, denn der Wellenindicator wird keine Empfindlichkeit von $0{,}2\,\%$ besessen haben. Auch $\gamma = 0{,}2$ erscheint zu hoch, denn $\frac{1}{2}\,\%$ Empfindlichkeit wäre auch unwahrscheinlich. Es wird demnach, ähnlich wie es auch schon oben pag. 83 geschlossen wurde, γ zwischen 0,1 und 0,2 liegen.

An den berechneten Beispielen ersieht man, dass die Amplituden mit ungeradem Index, d. h. diejenigen, welche in das oben pag. 76 als I bezeichnete Zeitintervall fallen, grösser sind, als die Amplituden mit geradem Index (Zeitintervall II), was mit den Betrachtungen der pag. 80 im Einklang steht.

Während ferner die Amplituden der elektrischen Kraft für eine Knotenlage sämmtlich positiv erscheinen, sind sie für eine Bauchlage von wechselndem Vorzeichen. Die physikalische Bedeutung ergiebt sich erst, wenn man den in den Formeln (75) auftretenden, hier aber nicht berücksichtigten Factor $e^{i2\pi\left(\frac{t}{T}-p\right)}$ mit zu Rathe zieht. Dann ergiebt sich, dass die Amplitude der elektrischen Kraft P sowohl bei einer Knoten- als bei einer Bauchlage das B_2 allemal beim Uebergang von einem Zeitintervall in das benachbarte (z. B. von 3 nach 4) sein Vorzeichen wechselt.

Nehmen wir γ zu 0,15 an, so würde für $k = 40$ sein $K = 1{,}686$, $B = 1{,}682$, d. h. der Unterschied zwischen K und B $\frac{1}{4}\,\%$.

Der obere Grenzwerth $\overline{k}$ der Maximalzahl der Knoten, welche selbst bei unendlich grosser Empfindlichkeit des Wellenindicators zu beobachten wären, ergiebt sich aus (93) in folgender Weise: Für grosses k giebt A_3 den grössten Werth aller A_h. Dieser ist nicht grösser als 1, d. h. die Knotenstärke unterscheidet sich nicht mehr von der Bauchstärke, wenn $A_2 + n < 1$ ist, da $m' < 1$ ist. Nun ist A_2 sehr wenig grösser, als nn', da m bei grossem k sehr klein ist; es ist also, da n' nur etwas kleiner als 1, A_2 sehr wenig grösser als n. Der obere Grenzwerth $\overline{k}$ wird also nahezu sich bestimmen aus der Gleichung:



$$2n = 1\,, \text{ d. h. } e^{\overline{\overline{k}}\tau} = 2\,, \text{ d. h.}$$
$$\overline{\overline{k}} = \frac{0{,}693}{\tau}\,.$$

In dem hier vorliegenden Falle, wo $\tau = 0{,}00285$, wäre der obere Grenzwerth $\overline{\overline{k}}$ sehr hoch, nämlich $\overline{\overline{k}} = 243$; für schlechter leitendes Material, als Kupferdrähte, wird aber dieser obere Grenzwerth des $\overline{\overline{k}}$ niedriger, z. B. für Neusilberdrähte ist $\overline{\overline{k}}$ etwa $= 60$, für Quecksilberleitung (Quecksilber in Glasröhren) ist $\overline{\overline{k}} = 30$. Immerhin zeigen diese Betrachtungen, dass der Drahtwiderstand sehr wenig Einfluss auf die beobachtbaren Erscheinungen hat, da selbst bei so schlechten Leitungsbahnen, wie Quecksilber, ein genügend empfindlicher Wellenindicator noch fast 30 Knoten würde nachweisen lassen. Viel wichtiger, als Vermeidung des Leitungswiderstandes, erscheint daher die Erreichung möglichst kleiner zeitlicher Dämpfung, falls möglichst viel Knoten beobachtet werden sollen.

C. Beliebiger Abstand beider Brücken.

Die Knotenlagen der Brücke B_2 werden experimentell am bequemsten nicht dadurch gefunden, dass man B_2 so lange verschiebt, bis der Wellenindicator (Vacuumröhre) ein Maximum anzeigt, sondern dadurch, dass man diejenigen Stellungen der Brücke B_2 ermittelt, für welche der Wellenindicator gleiche Stärke zeigt, z. B. das Leuchten der Vacuumröhre einsetzt, oder ein Uebergang von mässigem Leuchten zum hellen Leuchten eintritt. Diese Stellungen von B_2 sollen »Einsatzlagen« oder »Uebergangslagen« genannt werden. Das Mittel dieser »Uebergangslagen« entspricht den Knotenlagen, jedoch nur dann genau, wenn die Uebergangslagen nur wenige Bruchtheile einer Wellenlänge von einander entfernt sind. Bei grösserer Distanz liegt ihr Mittel näher nach der Brücke B_1 zu, als die Knotenlage[1]. So betrug bei $\lambda = 75$ cm die Verschiebung für den zweiten Knoten etwa 3 mm, falls die Einsatzlagen um 7 cm von einander entfernt waren. Diese Erscheinung ist durch die zeitliche Dämpfungsconstante γ wesentlich bestimmt. Um dies

1) »Arbeit I«, p. 12.

zu verstehen, wollen wir die Aufgabe, die elektrische Kraft bei beliebigem Brückenabstand $\beta\lambda$ zu finden, annähernd behandeln, indem wir die örtliche Dämpfung der Wellen vernachlässigen, d. h. $\tau = 0$ setzen, und ebenso auf die Brückenverkürzung keine Rücksicht nehmen, d. h. $\delta b = 0$, und daher nach (36) $\varphi = 0$, nach (33) $\varrho = 1$ setzen. Dann ist nach (40) und (42)

$$r = -e^{-2\alpha\beta}, \quad r' = -1 .$$

Ferner wollen wir nach (61) annehmen, dass der Wellenindicator in der Entfernung $p\lambda = \frac{1}{4}\lambda$ von der Brücke B_1 entfernt liegt.

Wie wir oben pag. 99 sahen, ist die elektrische Kraft im Zeitintervall I grösser, als im Zeitintervall II. Erstere ist jetzt nach der früheren Formel (47) zufolge der getroffenen Vereinfachungen:

$$P = e^{\alpha\left(\frac{t}{T} - p\right)} \frac{e^{-2\alpha\beta(h+1)} - 1 + e^{-2\alpha\beta} \cdot e^{-\frac{\gamma}{2}} (e^{-2\alpha\beta h} - 1)}{e^{-2\alpha\beta} - 1},$$

oder, da nach (55) zu setzen ist:

$$\frac{t}{T} = 2h\beta + p + \eta,$$

$$P = e^{\alpha\eta} \frac{1 - e^{2\alpha\beta(h+1)} + e^{-\frac{\gamma}{2}} (1 - e^{2\alpha\beta h})}{1 - e^{2\alpha\beta}},$$

d. h., da $\alpha = -\gamma + i\,2\pi$ ist:

$$(96) \quad P = e^{-\gamma\eta} \cdot e^{i2\pi\eta} \frac{1 - e^{-2\beta\gamma(h+1)} \cdot e^{i2\pi \cdot 2\beta(h+1)} + e^{-\frac{\gamma}{2}} (1 - e^{-2\beta\gamma h} \cdot e^{i2\pi \cdot 2\beta h})}{1 - e^{-2\beta\gamma} \cdot e^{i2\pi \cdot 2\beta}} .$$

Das Maximum von P hinsichtlich h wird offenbar erreicht, falls ist

$$e^{i2\pi \cdot 2\beta h} = -1 ,$$

d. h. falls ist

$$(97) \qquad 2\beta = k + q, \quad k \text{ ganze Zahl},$$

für:

$$(98) \qquad h = \pm \frac{1}{2q} .$$

Das Vorzeichen ist so zu wählen, dass h positiv ist. Dann ist nach (96):

$$P = e^{-\gamma\eta} \cdot e^{i2\pi\eta} \frac{1 + e^{-2\beta\gamma(h+1)} e^{i2\pi q} + e^{-\frac{\gamma}{2}} (1 + e^{-2\beta\gamma h})}{1 - e^{-2\beta\gamma} \cdot e^{i2\pi q}} .$$

Setzt man nun zur Abkürzung

$$1 + e^{-\frac{\gamma}{2}} (1 + e^{-2\beta\gamma h}) = a, \quad e^{+2\beta\gamma} = g ,$$

so wird:

$$P = P \cdot e^{-\gamma\eta} \cdot e^{i2\pi(\eta + \Psi)}, \tag{99}$$

wobei

$$\left\{\begin{aligned} P^2 &= \frac{a^2 + g^{-2(h+1)} + 2ag^{-(h+1)} \cdot \cos 2\pi q}{1 + g^{-2} - 2g^{-1} \cdot \cos 2\pi q}, \\ \operatorname{tg} 2\pi\Psi &= \sin 2\pi q \frac{a + g^{-h}}{ag - g^{-(h+1)} - \cos 2\pi q (a - g^{-h})}. \end{aligned}\right. \tag{100*}$$

Der reelle Theil der in (99) für P geschriebenen complexen Grösse hat nach pag. 68 die physikalische Bedeutung der elektrischen Kraft. Diese ist also bei beliebiger Lage der Brücke B_2 für das nach (98) bestimmte h:

$$P = P \cdot e^{-\gamma\eta} \cos 2\pi(\eta + \Psi). \tag{101}$$

Es kommt nun für das Einsetzen des Leuchtens einer Vacuumröhre darauf an, dass die elektrische Kraft P einmal einen gewissen Betrag überschreitet, d. h. auf das absolute Maximum der elektrischen Kraft; und allgemein wird es näherungsweise gestattet sein, anzunehmen, dass das Leuchten der Vacuumröhre für diejenigen Lagen β der Brücke B_2 gleich ist, in welchen die absoluten Maxima der P gleich sind. Da nun γ klein gegen 2π ist, so wird das absolute Maximum von P nach (101) zu einer Zeit η erreicht, welche ist

entweder 1) $\eta + \psi = 0$
oder 2) $\eta + \psi = \frac{1}{2}$.

Da η seiner Bedeutung nach positiv ist (ein negatives η würde in das Zeitintervall II führen, in welchem P kleiner ist), so kann die Bedingung 1) nur erfüllt werden, wenn Ψ negativ, d. h. nach (100), wenn q negativ und kleiner als $\frac{1}{2}$ ist, mit anderen Worten: für Brückenlagen, die vor dem zunächst benachbarten Knoten, von der Brücke B_1 ab gerechnet, liegen. Denn nach (97) entspricht ein negatives q, das kleiner als $\frac{1}{2}$, solcher Lage. Das absolute Maximum der elektrischen Kraft für solche Brückenlagen ist also:

$$P^- = P^- \cdot e^{\gamma\Psi^-}.$$

Für Brückenlagen, die hinter dem zunächst benachbarten Knoten liegen (positives $q < \frac{1}{2}$), ist gemäss der Bedingung 2) das absolute Maximum:

$$P^+ = P^+ \cdot e^{-\gamma(\frac{1}{2} - \Psi^+)}.$$

Nun ist zu berücksichtigen, dass nach (100) P^+ sich von P^- (für gleichen absoluten Werth von q geltend) ausserordentlich wenig unterscheidet. Dagegen ist beständig

$$e^{\gamma \Psi^-} > e^{-\gamma(\frac{1}{2} - \Psi^+)},$$

(es ist Ψ^- ein negativer Werth), da nach (100) die absoluten Werthe von Ψ stets unter $\frac{1}{4}$ liegen. Es ist daher auch

$$P^- > P^+,$$

und zwar bei einem bestimmten q um so mehr, je grösser die zeitliche Dämpfungsconstante γ ist. Wenn also die Brücke B_2 um etwas vor einem Knoten liegt, so ist die elektrische Kraft grösser, als wenn sie um gleichviel hinter dem Knoten liegt. Hieraus ergiebt sich, dass das Mittel zweier Brückenlagen, für welche die elektrische Kraft um gleichviel kleiner ist, als die Knotenstärke K, näher nach der Brücke B_1 zu liegen muss, als die Knotenlage, d. h. es folgt die oben erwähnte, experimentell gefundene Erscheinung.

Aus diesen Betrachtungen würde folgen, dass für äusserst kleines q P^- immer noch merklich grösser, als P^+ wäre, und dass für $q = 0$ kein stetiger Uebergang zwischen P^- und P^+ stattfindet, der natürlich eintreten muss. Dieser Widerspruch löst sich dadurch, dass für äusserst kleines Ψ, für welches

$$\cos 2\pi \Psi > e^{-\gamma(\frac{1}{2} - \Psi^+)},$$

das absolute Maximum für P^+ zur Zeit $\eta = 0$ erreicht wird und den Werth $P. \cos 2\pi\Psi$ besitzt, dieser Fall tritt aber erst ein, wenn q unter den Betrag 0,01 sinkt.

Genauer möge die betrachtete Erscheinung nicht qualitativ verfolgt werden, auch soll nicht näher untersucht werden, wie sich die Dämpfung γ aus der beobachteten Erscheinung, nämlich aus der Verschiebung des Mittels der »Einsatzlagen« gegen die Knotenlagen, bestimmen liesse. Im Princip müsste diese Aufgabe ja lösbar sein, sie leidet aber an der Schwierigkeit, dass die exacte Antwort davon abhängt, in welcher Weise die Störung des elektrischen Gleichgewichtes in den Drähten einsetzt. Wenn man nämlich vorausgesetzt hätte, dass der imaginäre Bestandtheil der oben für P hingeschriebenen complexen Grössen die physikalische Bedeutung der elek-

trischen Kraft hätte, so würde man erhalten, dass $P^+ > P^-$ ist. Im letzteren Falle würde die elektrische Kraft des Erregers das Gesetz:

$$P = e^{-\gamma\frac{t}{T}} \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T} \text{ von } t = 0 \text{ bis } t = \infty$$

befolgen, während in dem Falle, der hier bei der Discussion vorausgesetzt ist, das zeitliche Gesetz:

$$P = e^{-\gamma\frac{t}{T}} \cos 2\pi \frac{t}{T} \text{ von } t = 0 \text{ bis } t = \infty$$

befolgt wird. Der Unterschied beider Fälle liegt darin, dass in ersterem die elektrische Kraft bei ihrem Beginn allmählich von Null anfängt, während in letzterem die Kraft P bei ihrem Beginn plötzlich mit maximaler Stärke einsetzt. In Wirklichkeit mag vielleicht keiner dieser beiden Grenzfälle genau eintreten, aber jedenfalls wird der letztere der Wirklichkeit viel näher kommen, als der erstere. Denn die elektrischen Schwingungen kommen dadurch zu Stande, dass die beiden von einander isolirten Hälften des Erregers zu einer hohen Potentialdifferenz geladen werden, bis dass diese durch einen plötzlich einsetzenden Funken sich durch elektrische Schwingungen ausgleicht.

Abgesehen von der hier besprochenen Erscheinung sind die übrigen, hier berechneten Erscheinungen völlig unabhängig von der Art des Einsetzens der Schwingungen, wie man am einfachsten daraus erkennt, dass es für die Discussion ganz gleichgültig ist, ob sie an den reellen Bestandtheil der complexen Grösse $e^{\alpha\left(\frac{t}{T}-\frac{z}{\lambda}\right)}$ anknüpft, oder an den imaginären.

Die Formeln (99) und (100) sind übrigens gut brauchbar, wenn man discutiren will, wie die Schärfe der Einstellung der Brücke B_2 auf eine Knotenlage (Stärke der Resonanz) von der zeitlichen Dämpfungsconstante γ abhängt[1]). Der Nenner der

---

1) Die Aufgabe, die Schärfe der Resonanz bei beliebigen Werthen der zeitlichen Dämpfungen des Erregers und des Resonators zu berechnen, ist mehrfach von V. Bjerkness, zuletzt in Wied. Ann. 55, p. 121, 1895, behandelt worden. Der hier betrachtete Fall ist insofern einfacher, als die Resonatorleitung, nämlich der durch die Brücken B_1 und B_2 begrenzte Theil der Paralleldrähte, überhaupt keine zeitliche Dämpfung seiner Eigenschwingung besitzt, wenn man von der Reflexionsschwächung an den Brücken und dem galvanischen Widerstande der Drähte absieht.

Grösse P^2 ist hierfür besonders massgebend, und man erkennt aus (100) sofort, dass P^2 ein um so steileres Maximum für $q = 0$ (im Knoten, d. h. bei Resonanz) erreicht, je mehr sich die Grösse g dem Werthe 1 nähert, d. h. je kleiner γ und k (die Ordnungszahl des Knotens) sind.

II. Wellen in Drähten, die theilweise von leitenden Körpern umgeben sind.

A. Der umgebende Körper verhält sich normal.

1) Aufstellung und Integration der Differentialgleichungen.

Es soll der Fall betrachtet werden, dass die die Wellen führenden Paralleldrähte in einer Umgebung eingebettet sind, welche von Luft verschieden ist, d. h. welche eine von 1 verschiedene Dielektricitätsconstante ε und ein von Null verschiedenes Leitungsvermögen σ besitzt. Unter letzterem möge das elektromagnetisch gemessene Leitungsvermögen für constante Ströme verstanden sein, und es soll vorausgesetzt werden, dass der die Drähte umgebende Körper (z. B. Flüssigkeit, wässrige Salzlösung) sich auch für die betrachteten elektrischen Störungen kurzer Periode normal verhält, d. h. dass sein Verhalten gegenüber diesen Störungen vollkommen durch die Constanten ε und σ definirt ist, wie sie für stationäre oder sehr langsam wechselnde Ströme massgebend sind. Es sollen also die Fälle zunächst ausgeschlossen sein, dass die Umgebung Dispersionserscheinungen aufweist, denn diese hängen von besonderen Eigenschaften der Körper ab, d. h. von mehr Constanten, als nur von ε und σ.

Die Aufstellung der Differentialgleichungen kann wieder auf zwei Wegen geschehen, die zu gleichem Resultat führen, nämlich durch Anknüpfung an die Vorgänge entweder in den Drähten oder in dem die Drähte umgebenden Körper. Für ersteren Weg ist die oben gegangene, zuerst von Kirchhoff betretene Methode, im Wesentlichen nur darin zu ergänzen, dass der Stromverlust in den Drähten nicht nur durch scheinbare Ladungsänderungen der Drähte (Verschiebungsströme in ihrer Umgebung), sondern auch durch Leitungsströme ihrer Umgebung compensirt wird. Für letzteren Weg sind die Maxwell'schen Differentialgleichungen des elektromagnetischen

Feldes in einem Körper, welcher der Sitz sowohl von Verschiebungs-, wie Leitungsströmen sein kann, mit Rücksicht auf die eingelagerten Metalldrähte zu integriren. Dieses macht, nach der Hertz'schen Vorzeichnung des Weges für vollkommene Isolatoren, nicht die geringste Schwierigkeit.

Um im Anschlusse an unsere obigen Entwickelungen zu bleiben, möge der erste Weg hier gegangen werden. Die frühere Gleichung (1):

$$iw = E_1 + E_2, \tag{1}$$

bleibt bestehen mit derselben Bedeutung der Buchstaben. Ebenso die frühere Gleichung (2):

$$E_1 = -2\lg\frac{d}{R}\cdot\frac{\partial i}{\partial t}, \tag{2}$$

denn die Selbstinduction in den Drähten bleibt dieselbe, so lange die Magnetisirungsconstante ihrer Umgebung denselben Werth besitzt. Letzteres soll vorausgesetzt werden; es ist ja auch kein Körper mit mässig grossem Leitvermögen σ bekannt, welcher eine merklich von 1 verschiedene Magnetisirungsconstante besitzt.

Dagegen ändert sich die frühere Gleichung (3) durch das Vorhandensein der von 1 verschiedenen Dielectricitätsconstante ε in

$$V = \frac{1}{\varepsilon}\cdot 2\lg\frac{d}{R}\cdot e. \tag{3'}$$

Die Gleichung (4) wird so:

$$E_2 = -c\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{c}{\varepsilon}\,2\lg\frac{d}{R}\cdot\frac{\partial e}{\partial z}. \tag{4'}$$

Eine wesentliche Aenderung ist an der Gleichung (5) anzubringen. $-\frac{\partial i}{\partial z}$ bedeutet den Stromverlust in dem einen Paralleldrahte pro Längeneinheit. Derselbe wird theilweise compensirt durch den Verschiebungsstrom pro Längeneinheit: $\frac{1}{c}\frac{\partial e}{\partial t}$, theilweise durch den aus der Längeneinheit des Drahtes in seine Umgebung abfliessenden Leitungsstrom i_u, sodass an Stelle von (5) entsteht:

$$-\frac{\partial i}{\partial z} = \frac{1}{c}\frac{\partial e}{\partial t} + i_u. \tag{5'}$$

Der Leitungsstrom i_u fliesst in Richtung der aus dem Drahte austretenden elektrischen Kraftlinien. Diese stehen bei der grossen

metallischen Leitfähigkeit des Drahtes senkrecht[1]) zu seiner Oberfläche und verlaufen in der Nähe eines Drahtes in Richtung der zur Drahtaxe (z-Axe) senkrechten Radienvectoren ϱ,[2]) falls der andere Paralleldraht dem betrachteten Drahte nicht zu nahe kommt (d. h. falls die Distanz d der Drähte gross gegen ihren Radius R ist). Bezeichnet man die Stromdichte des Leitungsstromes i_u mit j, so ist nach dem Ohm'schen Gesetze

$$j = - \sigma \cdot c \cdot \frac{\partial V}{\partial \varrho},$$

denn $- c \frac{\partial V}{\partial \varrho}$ ist die elektromagnetisch gemessene, in Richtung von ϱ wirkende, elektromotorische Kraft der Längeneinheit, σ die specifische Leitfähigkeit des umgebenden Körpers. Da nun im beliebigen Abstand ϱ vom Drahte

$$V = \frac{1}{\varepsilon}\, 2 \lg \frac{d}{\varrho} \cdot \mathfrak{e}$$

ist (vgl. Formel (3'), wo V für $\varrho = R$ gebildet ist), so folgt

$$j = 2 \frac{\sigma c}{\varepsilon} \frac{\mathfrak{e}}{\varrho},$$

und die Stromstärke

$$i_u = 2\pi\, \varrho \cdot j = 4\pi \frac{\sigma c}{\varepsilon}\, \mathfrak{e}.$$

Gleichung (5') wird also:

$$(5'') \qquad - \frac{\partial i}{\partial z} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial t} + 4\pi\, c \frac{\sigma}{\varepsilon}\, \mathfrak{e}.$$

Differenzirt man nun die Gleichung (1) nach z und setzt für E_1 und E_2 ihre Werthe nach (2) und (4'), ferner für $\frac{\partial i}{\partial z}$ seinen Werth nach (5''), so entsteht:

$$(6') \qquad \frac{c^2}{\varepsilon} \frac{\partial^2 \mathfrak{e}}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial t} + 4\pi c^2 \frac{\sigma}{\varepsilon}\, \mathfrak{e}\right) + \frac{w}{2 \lg \frac{d}{R}} \left(\frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial t} + 4\pi c^2 \frac{\sigma}{\varepsilon}\, \mathfrak{e}\right).$$

Eine ebenso gebaute Differentialgleichung gilt für die Stromstärke i.

Zu derselben Differentialgleichung wäre man gelangt, wenn man an die Vorgänge in der Umgebung der Drähte anknüpfte. Wenn nämlich in einem Körper, welcher die Dielektricitätsconstante ε besitzt, auch eine merkbare Leitfähigkeit σ vorhanden ist, so ist der Effect des

1) Vgl. des Verf. »Physik des Äthers«. Stuttgart 1894, p. 449.

2) Eine Verwechselung mit der oben pag. 70 eingeführten Grösse ϱ ist wohl nicht zu befürchten. Das hier gebrauchte ϱ kommt später nicht wieder vor.

Hinzukommens von σ derselbe, als ob in den Differentialgleichungen des elektromagnetischen Feldes des Körpers an Stelle der Operation: $\varepsilon \frac{\partial}{\partial t}$ auftritt: $\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} + 4\pi c^2 \sigma$.[1]) Der Widerstand w des Drahtes kann dann noch auf demselben Wege in der Differentialgleichung berücksichtigt werden, wie ich es früher[2]) für einen vollkommenen Isolator durchgeführt habe.

An einer bestimmten, aber beliebig gelegenen Stelle der Drahtleitung sollen Störungen der Form auftreten:

$$\mathfrak{e} = A \cdot e^{\alpha \frac{t}{T}},$$

wobei

$$\alpha = -\gamma + 2\pi \sqrt{-1}$$

ist. Im Folgenden empfiehlt es sich, an Stelle der Dämpfungsconstanten γ einzuführen:

$$\gamma' = \gamma : 2\pi.$$

Es ist dann

$$\alpha = 2\pi \left(-\gamma' + \sqrt{-1}\right). \tag{102}$$

Diesen Störungen entspricht ein Integral der Differentialgleichung (6'), welches in der Form geschrieben werden kann:

$$\mathfrak{e} = A_1 e^{\alpha \frac{t}{T} - \alpha' \frac{z}{\lambda'} - 2\pi \varkappa \frac{z}{\lambda'}} + A_2 \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} + \alpha' \frac{z}{\lambda'} + 2\pi \varkappa \frac{z}{\lambda'}}. \tag{103}$$

Unter α' ist die oben pag. 87 durch die Gleichung (69'') definirte Grösse:

$$\alpha' = \alpha + \tau, \quad \tau = \frac{T \cdot w}{4 \lg \frac{d}{R}} = \frac{\sqrt{T}}{4 R \lg \frac{d}{R} \sqrt{\sigma'}}$$

verstanden. σ' bezeichnet die Leitfähigkeit des Drahtes (zum Unterschiede von σ, der Leitfähigkeit der Umgebung).

Die im Integrale (103) noch auftretenden Constanten λ' und $\varkappa$ bestimmen sich nach (6') durch die Gleichung:

$$\frac{c^2}{\varepsilon} \left(\frac{\alpha + 2\pi\varkappa + \tau}{\lambda'}\right)^2 = \left(\frac{\alpha^2}{T^2} + \frac{2\tau\alpha}{T^2}\right)\left(1 + 4\pi \frac{c^2 \sigma}{\varepsilon \alpha} T\right).$$

Bei der Kleinheit von τ (nach pag. 87 ist für meine Versuche $\tau = 0{,}00285$) ist es gestattet, zu setzen

1) Vgl. Maxwell, Hertz, oder auch das Buch des Verf. »Physik des Äthers« p. 548.

2) »Physik des Äthers« p. 450.

$$\alpha^2 + 2\tau\alpha = (\alpha + \tau)^2.$$

Obige Gleichung wird dann:

$$(104) \qquad \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\alpha + 2\pi\varkappa + \tau}{\lambda'} = \frac{\alpha + \tau}{T} \sqrt{1 + 4\pi \frac{c^2\sigma}{\varepsilon\alpha} T}.$$

Für $\sigma = 0$ würde hieraus folgen:

$$(105) \qquad \varkappa = 0, \; \lambda' = cT : \sqrt{\varepsilon}.$$

Es sollen nun nur solche Fälle betrachtet werden, in welchen die Leitfähigkeit σ' der Drähte sehr viel grösser ist, als die Leitfähigkeit σ der Umgebung, denn nur dann kann man Wellen in ihr beobachten. Dies ist z. B. immer der Fall, wenn die Umgebung selbst aus gut leitenden Elektrolyten besteht. Es ist dann bei der Kleinheit von τ gestattet, in den mit τ multiplicirten Gliedern der Gleichung (104) $\sigma = 0$ anzunehmen und die nach (105) für $\sigma = 0$ geltende Beziehung $\lambda' = cT : \sqrt{\varepsilon}$ zu benutzen. Dann kann man in (104) die mit τ multiplicirten Glieder auf beiden Seiten fortheben und es bleibt die Gleichung zu erfüllen übrig:

$$(104') \qquad \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\alpha + 2\pi\varkappa}{\lambda'} = \frac{\alpha}{T} \sqrt{1 + \frac{4\pi c^2 \sigma}{\varepsilon\alpha} T},$$

oder unter Benutzung von (102):

$$\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\varkappa - \gamma' + \sqrt{-1}}{\lambda'} = \frac{-\gamma' + \sqrt{-1}}{T} \sqrt{1 + \frac{2 c^2 \sigma T}{\varepsilon(-\gamma' + \sqrt{-1})}}.$$

Führt man die Abkürzung ein:

$$(106) \qquad \frac{c^2 \sigma T}{\varepsilon} = s,$$

so schreibt sich die vorige Gleichung:

$$(107) \quad \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\varkappa - \gamma' + \sqrt{-1}}{\lambda'} = \frac{-\gamma' + \sqrt{-1}}{T} \sqrt{1 + \frac{2s}{-\gamma' + \sqrt{-1}}}.$$

Ist nun die Leitfähigkeit σ, und damit auch die Grösse s so klein, dass man s^2 gegen 1 vernachlässigen kann, so folgt

$$\sqrt{1 + \frac{2s}{-\gamma' + \sqrt{-1}}} = 1 + \frac{s}{-\gamma' + \sqrt{-1}},$$

und aus (107):

$$(108) \qquad \lambda' = cT : \sqrt{\varepsilon}, \quad \varkappa = s = \frac{c^2 \sigma T}{\varepsilon}.$$

Die Wellenlänge ist also dann durch Auftreten der Leitfähigkeit σ gar nicht beeinflusst, die Grösse $\varkappa$, welche die örtliche Dämpfung der Wellen bestimmt (sie soll Absorptionsindex[1]) der Umgebung genannt werden) ist proportional[2]) zu σ und T, umgekehrt proportional zu ε.

Es kommen aber auch praktisch interessante Fälle vor, in denen s^2 nicht gegen 1 vernachlässigt werden kann. Dann liefert die Gleichung (107) durch Quadriren und Trennung des Reellen vom Imaginären:

$$
(109) \qquad \begin{aligned} \frac{1-(\varkappa-\gamma')^2}{\lambda'^2} &= \frac{\varepsilon}{c^2 T^2}\cdot(1-\gamma'^2+2s\gamma'),\\ \frac{\varkappa-\gamma'}{\lambda'^2} &= \frac{\varepsilon}{c^2 T^2}\cdot(s-\gamma'). \end{aligned}
$$

Nun ist zu beachten, dass γ' in den praktisch vorkommenden Fällen so klein ist, dass es in diesen Gleichungen kaum berücksichtigt zu werden braucht. Z. B. ist in meinen Versuchen γ etwa $= 0{,}15$, daher $\gamma' = \gamma : 2\pi = 0{,}024$. Aber selbst wenn man γ' in obigen Gleichungen (109) beibehält, so ist es wenigstens gestattet, in den mit γ', bezw. γ'^2 multiplicirten Gliedern die Näherungswerthe (108) für λ' und $\varkappa$ einzusetzen. Dann heben sich aber alle mit γ' bezw. γ'^2 multiplicirten Glieder aus den Gleichungen (109) fort, und es bleibt übrig:

$$
\frac{1-\varkappa^2}{\lambda'^2} = \frac{\varepsilon}{c^2 T^2}, \quad \frac{\varkappa}{\lambda'^2} = \frac{\varepsilon s}{c^2 T^2},
$$

d. h.

$$
(110) \qquad \varkappa = \frac{2s}{1+\sqrt{1+4s^2}}, \quad \lambda'^2 = \frac{c^2 T^2}{\varepsilon}\,\frac{2}{1+\sqrt{1+4s^2}}.
$$

cT ist die Wellenlänge λ der Schwingung, wenn die Paralleldrähte von Luft umgeben wären. Das Verhältniss

$$
\lambda : \lambda' = n
$$

wird der elektrische Brechungsexponent der Umgebung genannt. Nach (110) ergiebt sich für ihn die Beziehung:

---

1) $\varkappa$ ist identisch mit der in meinen optischen Arbeiten gewählten Bezeichnung, z. B. Wied. Ann. 39, p. 481, 1890.

2) Wenn man die Grösse τ, oder besser noch $\tau : 2\pi$, den Absorptionsindex der Drähte nennt, so ist bemerkenswerth, dass dieser proportional zu $\sqrt{T}$ und umgekehrt proportional zur Quadratwurzel aus der Leitfähigkeit der Drähte ist.

$$n = \sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + 4s^2}}{2}}. \tag{111}$$

Bei Umgebungen, die dieselbe Dielektricitätsconstante ε besitzen, aber verschiedene Leitfähigkeiten σ, wächst also der elektrische Brechungsexponent mit zunehmender Leitfähigkeit, der Absorptionsindex ebenfalls, aber etwas langsamer, als die Leitfähigkeit selbst. Ferner ist von Bedeutung, dass der Absorptionsindex fast proportional der Schwingungsdauer der Wellen zunimmt, und bei zwei Flüssigkeiten gleicher Leitfähigkeit, aber verschiedener Dielektricitätsconstante, letzterer nahezu umgekehrt proportional ist.

Es hat sich herausgestellt[1]), dass wässrige Salzlösungen bis zu $\lambda = 75$ cm solche normal sich verhaltenden Körper sind, wie wir sie in diesem Abschnitt betrachtet haben, und dass sie alle dieselbe Dielektrisitätsconstante, wie reines Wasser ($\varepsilon = 81$ bei 17° Cels.) besitzen; selbst bei hoher Leitfähigkeit σ ist dies wenigstens wahrscheinlich gemacht. In der folgenden Tabelle stelle ich die für $\lambda = 75$ cm, d. h. $T = \lambda : c = 25 \cdot 10^{-10}$ geltenden Werthe von n und $\varkappa$ nach den Gleichungen (110) und (111) zusammen, für $\varepsilon = 81$ und verschiedenes σ. K bedeutet das auf Quecksilber als Einheit bezogene Leitvermögen. Es ist

$$\sigma = 1{,}063 \cdot 10^{-5} \cdot K.$$

Abhängigkeit des Brechungsexponenten und des Absorptionsindex von der Leitfähigkeit bei $\lambda = 75$ cm, $\varepsilon = 81$.

$K \cdot 10^8$	5	25	50	75	100	125	150	175	200	250	380
$\sigma \cdot 10^{12}$	0,53	2,66	5,31	7,96	10,63	13,30	15,95	18,60	21,3	26,6	40,5
s	0,015	0,074	0,148	0,222	0,297	0,370	0,445	0,518	0,593	0,742	1,13
$\varkappa$	0,015	0,074	0,145	0,212	0,274	0,329	0,380	0,427	0,466	0,531	0,647
n	9,00	9,02	9,10	9,22	9,39	9,55	9,73	9,91	10,20	10,63	11,90

Die Beobachtungen (»Arbeit II«) entsprechen nahezu dieser theoretisch berechneten Abhängigkeit des n von σ.

1) Vgl. »Arbeit II« und in diesem Aufsatz die Bemerkungen weiter unten.

2) Reflexion und Übergang von Wellen an einer Brücke.

Es liege bei $z = \beta'\lambda'$ eine metallische Brücke B' auf. Bezeichnet man, wie früher, mit i die Stromstärke in den Drähten vor der Brücke, mit i' den Strom in der Brücke, mit i'' den über die Brücke hinüber gehenden Strom, und ist ferner e die scheinbare Ladung in der vor der Brücke bestehenden Welle, e'' in der hinter ihr bestehenden Welle, so bleiben die früheren Brückenbedingungen (cf. oben pag. 67) (14) und (15), nämlich:

$$(14) \qquad i' = i - i'' \quad \text{für } z = \beta'\lambda',$$

$$(15) \qquad e = e'' \quad \text{für } z = \beta\lambda'$$

bestehen. Vom galvanischen Widerstande in der Brücke selbst können wir absehen, da, wie oben pag. 90 festgestellt wurde, dieser einen nicht bemerkbaren Einfluss ausübt. Daher können wir die frühere Brückenbedingung (13) auch hier anwenden, nur mit der Modification, dass an Stelle der Selbstinduction L der Längeneinheit der Brücke in Luft hier einzuführen ist die Selbstinduction L' der Längeneinheit der Brücke, während sie im Körper mit den Constanten ε, σ liegt. Dieses L' ist kleiner als L, falls die Wellenlänge λ' der Schwingungen im Körper kleiner als die Wellenlänge λ der Schwingungen in Luft ist, denn der Rückstrom für i' liegt, roh taxirt, in der Entfernung $\frac{1}{4}\lambda'$ von der Brücke (cf. oben pag. 66), und es ist ungefähr [vgl. die frühere Formel (11)]:

$$(11') \qquad L' = 2 \lg \frac{\frac{1}{4}\lambda'}{R'}.$$

Ausserdem müssen wir in der früheren Brückenbedingung (13) auf der rechten Seite den Factor $\frac{1}{\varepsilon}$ hinzufügen, weil die von der Ladung e herrührende electrische Kraft E_2' (vgl. die frühere Formel (12)) im Verhältniss $1 : \varepsilon$ verkleinert wird, wenn die Ladung e nicht in Luft, sondern in einem Körper der Dielectricitätsconstanten ε lagert. — Die frühere Brückenbedingung (13) wird also hier zu:

$$(13') \qquad L'l\frac{\partial i'}{\partial t} = 4c\frac{e}{\varepsilon} \lg \frac{d}{R} \quad \text{für } z = \beta'\lambda'.$$

Führt man das Verhältniss ζ' der Selbstinduction der Längeneinheit der Brücke zu der der Drähte ein durch:

$$(30') \qquad \zeta' = L' : 2 \lg \frac{d}{R},$$

so wird (13') zu:

$$l\zeta'\frac{\partial i'}{\partial t} = 2c\frac{\mathfrak{e}}{\varepsilon} \text{ für } z = \beta'\lambda'. \tag{13''}$$

Es möge nun nach der Brücke zu die Ladungswelle einfallen:

$$\mathfrak{e}_e = A\cdot e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha''\frac{z}{\lambda'}}. \tag{112}$$

Hierbei ist gemäss der Gleichung (103) α'' eine Abkürzung für:

$$\alpha'' = \alpha' + 2\pi\varkappa = \alpha + \tau + 2\pi\varkappa. \tag{113}$$

Die an der Brücke reflectirte Welle soll dargestellt werden durch

$$\mathfrak{e}_r = r\cdot A\cdot e^{\alpha\frac{t}{T} + \alpha''\frac{z}{\lambda'}}, \tag{114}$$

wobei r (Reflexionsfactor) eine complexe Grösse bezeichnet, die über die Brücke hinübergehende durch

$$\mathfrak{e}'' = \delta\cdot A\cdot e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha''\frac{z}{\lambda'}}.$$

Analog ist für die Stromstärken zu setzen:

$$\begin{cases} i_e = B\cdot e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha''\frac{z}{\lambda'}}, \\ i_r = -r\cdot B\cdot e^{\alpha\frac{t}{T} + \alpha''\frac{z}{\lambda'}}, \\ i'' = \delta\cdot B\cdot e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha''\frac{z}{\lambda'}}. \end{cases} \tag{115}$$

Der Factor B ergiebt sich gemäss der Gleichung (5'') (pag. 107) zu:

$$B\frac{\alpha''}{\lambda'} = A\frac{\alpha}{cT}\left(1 + 4\pi\frac{c^2\sigma}{\varepsilon\alpha}T\right). \tag{116}$$

Die Bedingung (15) ergiebt nun:

$$e^{-\alpha''\beta'} + r\cdot e^{+\alpha''\beta'} = \delta\cdot e^{-\alpha''\beta'},$$

die Bedingung (14):

$$i' = B\cdot e^{\alpha\frac{t}{T}}\left(e^{-\alpha''\beta'} - r\cdot e^{+\alpha''\beta'} - \delta\cdot e^{-\alpha''\beta'}\right),$$

d. h. vermöge der vorigen Gleichung:

$$i' = -B\cdot e^{\alpha\frac{t}{T}}\cdot 2r\cdot e^{\alpha''\beta'}.$$

Setzt man diesen Werth in die Brückenbedingung (13'') ein, so folgt:

$$Br\cdot l\zeta'\cdot\frac{\alpha}{T}\cdot e^{\alpha''\beta'} = A\frac{c}{\varepsilon}\left(e^{-\alpha''\beta'} + r\cdot e^{+\alpha''\beta'}\right),$$

oder

(117) $$r \cdot e^{2\alpha''\beta'}\left(1 + \frac{B}{A}\zeta\alpha\varepsilon\frac{l}{cT}\right) = -1\,.$$

In dieser Gleichung ist für $\frac{B}{A}$ sein aus (116) folgender Werth zu entnehmen. Dieser Werth ist infolge der Gleichung (104') einfach zu schreiben, da man nun von der Grösse τ (dem galvanischen Widerstande der Drähte) absehen kann, weil $\frac{B}{A}$ nur in dem kleinen Correctionsgliede vorkommt, welches mit der Brückenlänge l proportional ist. Bei Vernachlässigung von τ ergiebt sich nämlich aus (104'), indem man $\alpha'' = \alpha + 2\pi\varkappa$ setzt:

$$\frac{c^2}{\varepsilon}\left(\frac{\alpha''}{\lambda'}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{T^2}\left(1 + 4\pi\frac{c^2\sigma}{\varepsilon\alpha}T\right).$$

Dividirt man diese Gleichung mit (116), so folgt

$$B\frac{\lambda'}{\alpha''}\frac{\varepsilon}{c^2} = A\frac{T}{c\alpha}\,,$$

es ist also

(116') $$\frac{B}{A}\cdot\frac{\alpha\varepsilon}{cT} = \frac{\alpha''}{\lambda'}\,.$$

Setzt man dieses in die Formel (117) ein, so folgt der Reflexionsfactor zu:

(118) $$r = -\frac{e^{-2\alpha''\beta'}}{1 + \alpha''\zeta'\frac{l}{\lambda'}}\,;$$

bringt man, wie früher [cf. pag. 70 Formel (31)] $1 + \alpha''\zeta'\frac{l}{\lambda'}$ auf die Form $\frac{1}{\varrho'}\cdot e^{+\alpha''\varphi'}$, d. h. setzt

(119) $$\frac{1}{1 + \alpha''\zeta'\frac{l}{\lambda'}} = \varrho'\cdot e^{-\alpha''\varphi'}\,,$$

so wird

(120) $$r = -\varrho'\cdot e^{-\alpha''(2\beta'+\varphi')}.$$

Die Brückenverkürzung ist [vgl. die frühere analoge Formel 36)]:

(36') $$\delta b' = \varphi'\cdot\frac{\lambda'}{2}\,.$$

In der früheren Formel (37) (pag. 72) war die Brückenverkürzung bei Luftumgebung der Drähte in eine besonders bequeme Form gebracht worden, die sich daraus ergab, dass $l:\lambda$ und damit φ ein so kleiner Werth war, dass $\operatorname{tg} 2\pi\varphi = 2\pi\varphi$ gesetzt werden konnte. Da

die Wellenlänge λ' unter Umständen bedeutend kleiner ist, als λ, z. B. im Wasser 9 mal kleiner, so ist eine solche Vereinfachung bei derselben Bügellänge l hier meist nicht erlaubt, da $l:\lambda'$ einen grösseren Betrag hat. Bei meinen Versuchen war $l = 1{,}8$ cm, $\lambda = 75$ cm, λ' (Wasser) $= 8{,}3$ cm, daher ist $l:\lambda = 0{,}024$; $l:\lambda' = 0{,}216$.

In (119) ist es nun gestattet, da α'' nur mit den jedenfalls nicht bedeutenden Beträgen φ', bezw. $\frac{l}{\lambda'}$ multiplicirt auftritt, für α'' einen Näherungswerth einzuführen, der sich aus (113) ergiebt, wenn man den kleinen Werth τ neben γ und $2\pi\varkappa$ vernachlässigt, d. h. nach (113) und (102) schreibt:

$$\alpha'' = 2\pi(\varkappa - \gamma' + \sqrt{-1}) . \tag{121}$$

Dann wird (119) zu:

$$\varrho' \cdot e^{-2\pi\varphi'(\varkappa - \gamma' + \sqrt{-1})} = \frac{1}{1 + 2\pi\zeta'\frac{l}{\lambda'}(\varkappa - \gamma' + \sqrt{-1})},$$

d. h.

$$(122) \quad \begin{cases} \varrho' \cdot e^{-2\pi\varphi'(\varkappa - \gamma')} = \dfrac{1}{\sqrt{\left[1 + 2\pi\zeta'\frac{l}{\lambda'}(\varkappa - \gamma')\right]^2 + \left(2\pi\zeta'\frac{l}{\lambda'}\right)^2}}, \\[2ex] \operatorname{tg} 2\pi\varphi' = \dfrac{2\pi\zeta'\frac{l}{\lambda'}}{1 + 2\pi\zeta'\frac{l}{\lambda'}(\varkappa - \gamma')} . \end{cases}$$

Nehmen wir zunächst $\varkappa = 0$, und legen obiges Beispiel für Wasser zu Grunde, in welchem $l:\lambda' = 0{,}216$, nehmen wir ferner für γ den Werth 0,15 (cf. oben pag. 99), d. h. für γ' den Werth 0,024, schliesslich für ζ' den aus (11') (es war $R' = 0{,}1$ cm) und (30') folgenden Werth $\zeta' = 0{,}845$, so folgt aus (122) für $l = 1{,}8$ cm:

$$(122') \quad \varrho' \cdot e^{+\gamma\varphi'} = 0{,}661 ; \quad \operatorname{tg} 2\pi\varphi' = 1{,}18 , \quad \varphi' = 0{,}14 .$$

Hieraus ergiebt sich nach (36') die Brückenverkürzung zu

$$\delta b' = 5{,}8 \text{ mm} .$$

Dieser Werth stimmt sehr gut mit den Beobachtungen[1]) überein, denen zufolge $\delta b'$ zwischen 5,5 und 6 mm liegt.

Die Brückenverkürzung ist also in Wasser etwas kleiner, als in Luft, wo sie 8 mm betrug (cf. oben pag. 72). Dies ergiebt sich bei

1) »Arbeit II«, p. 343.

sehr kleinem $l:\lambda'$, bei welchem $\operatorname{tg} 2\pi\varphi' = 2\pi\varphi'$ zu setzen ist, einfach aus der Thatsache, dass gemäss (11) und (11') $\zeta > \zeta'$ ist, falls $\lambda > \lambda'$ ist. Denn bei sehr kleinem φ' ist nach (122) und (36') $\delta b' = \frac{1}{2} l \,.\, \zeta'$, während nach (37) (pag. 72) $\delta b = \frac{1}{2} l \,.\, \zeta$ ist.

Für $\varkappa = 0{,}531$, was nach der Tabelle der pag. 111 einer sehr gut leitenden wässrigen Salzlösung der Leitfähigkeit $K = 250 \,.\, 10^{-8}$ bezogen auf Quecksilber entspricht, folgt nach obiger Tabelle $\lambda' = 7{,}05$, daher $\zeta' = 0{,}800$. Es ergiebt sich dann aus (122) für $l = 1{,}8$ cm:

$$(122'') \quad \varrho' e^{-2\pi\varphi'(\varkappa - \gamma')} = 0{,}476; \quad \operatorname{tg} 2\pi\varphi' = 0{,}777, \quad \varphi' = 0{,}105.$$

Die Brückenverkürzung wird:

$$\delta b' = 3{,}7 \text{ mm}.$$

Die Brückenverkürzung ist also für eine gutleitende wässrige Lösung geringer, als für reines Wasser. Dieses Resultat ergiebt sich auch schon aus der Discussion der allgemeinen Formel (122) für $\operatorname{tg} 2\pi\varphi'$ in Verbindung mit (36') für $\delta b'$.

Wesentliches Interesse bietet auch der Factor $\varrho' . e^{+\gamma\varphi'}$ bezw. $\varrho' . e^{-2\pi\varphi'(\varkappa - \gamma')}$. Denn nach (120) bedeutet er das Amplitudenverhältniss der reflectirten Welle und der einfallenden. Wie das numerische Beispiel (122') zeigt, ist für reines Wasser, selbst bei der kleinen Brückenlänge von 1,8 cm, die reflectirte Amplitude nur der $\frac{2}{3}$te Theil der einfallenden. Für gut leitende Lösung sinkt dies Verhältniss nach (122'') sogar unter $\frac{1}{2}$. Ein Vergleich mit der oben auf pag. 73 für Luft angestellten Rechnung, nach der sich das Amplitudenverhältniss zu 0,99 ergab, zeigt, dass der Nachweis stehender Wellen, die durch Reflexion an einer Brücke zu Stande kommen, um so schwieriger wird, je kleiner die Wellenlänge der Schwingung für die betreffende Umgebung der Drähte ist, denn um so weniger intensiv ist die reflectirte Welle. Man wird deshalb zur möglichst guten Beobachtung stehender Wellen die Brückenlänge, d. h. den Abstand der Paralleldrähte klein wählen, denn dadurch wird die Amplitude der reflectirten Welle verstärkt.

Bei den Versuchen, die ich mit wässrigen Salzlösungen angestellt habe, habe ich zum Theil den Abstand d der Paralleldrähte $= 1$ cm gewählt (ebenso $l = 1$). Dann wird für $l = 1$ cm:

$$(122''') \quad \begin{aligned} &\text{bei } \varkappa = 0: && \varrho' e^{\gamma \varphi'} = 0{,}810; && \varphi' = 0{,}10, \ \delta b' = 4{,}1 \text{ mm.} \\ &\text{bei } \varkappa = 0{,}53: && \varrho' e^{-2\pi\varphi'(\varkappa-\gamma')} = 0{,}646; && \varphi' = 0{,}077, \ \delta b' = 3{,}2 \text{ mm.} \end{aligned}$$

Ein Vergleich mit (122') und (122'') zeigt, dass in der That durch die kürzere Brückenlänge die Amplitude der reflectirten Welle bedeutend gestiegen ist; die Brückenverkürzung ist kleiner geworden; es ist auch zu beachten, dass der Unterschied zwischen den Brückenverkürzungen bei $\varkappa = 0$ und $\varkappa = 0{,}53$ erheblich vermindert ist gegenüber dem obigen Beispiele mit längerer Brücke.

3) Reflexion und Übergang der Wellen an der Grenze zwischen Luft und Flüssigkeit.

Bei $z = \beta\lambda$ mögen die Paralleldrähte von Luft in eine andere Substanz (z. B. Flüssigkeit) übertreten. Die Grenze zwischen Luft und Flüssigkeit sei eine Ebene, die senkrecht zu den Paralleldrähten steht. In der Flüssigkeit bestehe die Wellenlänge λ' und der Absorptionsindex $\varkappa$. Die Grenzbedingungen sind offenbar, dass sich die Stromwelle continuirlich über die Flüssigkeitsgrenze hinüber fortsetzt, und ebenso die Potentialwelle, welche von der scheinbaren Ladung $\mathfrak{e}$ der Drähte herrührt. Denn das Potential V auf den Drähten muss zu beiden Seiten der Flüssigkeitsgrenze wegen der metallischen Eigenschaft der Drähte dasselbe sein.

Bezeichnet man die Wellen in Luft ohne Index, in Flüssigkeit mit dem oberen Index ', so sind also die Grenzbedingungen:

$$(123) \qquad \mathfrak{e} = \frac{\mathfrak{e}'}{\varepsilon}, \quad i = i' \quad \text{für } z = \beta\lambda.$$

Fallen die Wellen in Luft ein ($\mathfrak{e}_e$), so tritt noch eine reflectirte Welle ($\mathfrak{e}_r$) in Luft auf, und es ist

$$\mathfrak{e} = \mathfrak{e}_e + \mathfrak{e}_r.$$

Nach (69) ist zu setzen:

$$(124) \qquad \begin{cases} \mathfrak{e}_e = \ A \cdot e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha'\frac{z}{\lambda}}, \\ \mathfrak{e}_r = rA \cdot e^{\alpha\frac{t}{T} + \alpha'\frac{z}{\lambda}}, \\ \text{nach (112) ist zu setzen:} \\ \mathfrak{e}' = \delta A \cdot e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha''\frac{z}{\lambda'}}. \end{cases}$$

Dabei sind die r und δ complexe Factoren (Reflexions- und Uebergangsfactor) ferner ist

$$\alpha = -\gamma + 2\pi\sqrt{-1} = 2\pi(-\gamma' + \sqrt{-1}),$$
$$\alpha' = \alpha + \tau, \quad \alpha'' = \alpha + \tau + 2\pi\varkappa.$$

Die Stromwellen sind aus (124) zu finden, wenn man für Luft die Gleichung (5) pag. 65

$$-\frac{\partial i_e}{\partial z} = \frac{1}{c}\frac{\partial e_e}{\partial t}, \quad -\frac{\partial i_r}{\partial z} = \frac{1}{c}\frac{\partial e_r}{\partial t},$$

für die Flüssigkeit die Gleichung (5″) pag. 107:

$$-\frac{\partial i'}{\partial z} = \frac{1}{c}\frac{\partial e''}{\partial t} + 4\pi c\frac{\sigma}{\varepsilon}e''$$

in Anwendung bringt. Erstere beiden Gleichungen liefern:

$$i_e = \quad A\frac{\alpha}{\alpha'}\cdot e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha'\frac{z}{\lambda}}$$
$$i_r = -rA\frac{\alpha}{\alpha'}\cdot e^{\alpha\frac{t}{T} + \alpha'\frac{z}{\lambda}},$$

letztere Gleichung giebt, wenn man schreibt:

$$i' = \delta B\cdot e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha''\frac{z}{\lambda'}},$$

eine bestimmte Relation für B, die schon oben pag. 113 in der Gleichung (116) ausgedrückt ist. Man kann nun in den Amplituden für die Stromstärken i unbedenklich vom Drahtwiderstande absehen, d. h. $\tau = 0$ setzen. Diese Grösse τ ist überhaupt nur beizubehalten, wenn sie mit z multiplicirt auftritt, da z unter Umständen grosse Werthe annehmen kann.

Bei dieser Vereinfachung ist $\alpha' = \alpha$ zu setzen, und B nimmt gemäss (116′) (pag. 114) den Werth an:

$$B = A\cdot\frac{\alpha''}{\lambda'}\cdot\frac{cT}{\alpha\varepsilon} = A\frac{\alpha''}{\alpha\varepsilon}\frac{\lambda}{\lambda'}.$$

Die Stromstärken werden daher:

$$
\begin{aligned}
i_e &= \quad A\cdot e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha'\frac{z}{\lambda}},\\
i_r &= -rA\cdot e^{\alpha\frac{t}{T} + \alpha'\frac{z}{\lambda}},\\
i' &= \quad \delta A\frac{\alpha''}{\alpha\varepsilon}\frac{\lambda}{\lambda'}e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha''\frac{z}{\lambda'}}.
\end{aligned}
\tag{125}
$$

Die Grenzbedingungen (123) ergeben nun:

$$(126)\qquad \begin{aligned} e^{-\alpha'\beta} + r\cdot e^{+\alpha'\beta} &= \frac{\delta}{\varepsilon}\, e^{-\alpha''\beta\frac{\lambda}{\lambda'}}, \\ e^{-\alpha'\beta} - r\cdot e^{+\alpha'\beta} &= \frac{\delta}{\varepsilon}\,\frac{\alpha''}{\alpha}\,\frac{\lambda}{\lambda'}\, e^{-\alpha''\beta\frac{\lambda}{\lambda'}}. \end{aligned}$$

Hieraus ist der Reflexionsfactor r und Uebergangsfactor δ leicht zu berechnen. Wir wollen dies näher ausführen für den practisch allein wichtigen Fall, dass die zeitliche Dämpfungsconstante γ neben 2π sehr klein ist. Man kann dann in dem Factor $\frac{\alpha''}{\alpha}$ der zweiten Gleichung (126) γ einfach gleich Null annehmen, d. h. setzen:

$$\frac{\alpha''}{\alpha} = 1 - \varkappa\sqrt{-1}.$$

Ist z. B. $\gamma = 0{,}15$, wie es oben für die von mir angestellten Versuche berechnet wurde, so wird r und δ nur unmerklich durch diese Vernachlässigung von γ modificirt. Führt man für $\lambda:\lambda'$ die Bezeichnung n (elektrischer Brechungsexponent) ein (cf. oben pag. 111) und setzt $\sqrt{-1} = i$, so wird (126) zu:

$$\begin{aligned} e^{-\alpha'\beta} + r\cdot e^{+\alpha'\beta} &= \frac{\delta}{\varepsilon}\, e^{-\alpha''\beta n}, \\ e^{-\alpha'\beta} - r\cdot e^{\alpha'\beta} &= \frac{\delta}{\varepsilon}\, n\,(1 - i\varkappa)\, e^{-\alpha''\beta n}. \end{aligned}$$

Daraus entsteht:

$$(127)\qquad \frac{\delta}{\varepsilon} = \frac{2\, e^{(n\alpha'' - \alpha')\beta}}{n(1 - i\varkappa) + 1}, \quad r = -\frac{n(1 - i\varkappa) - 1}{n(1 - i\varkappa) + 1}\, e^{-2\alpha'\beta}.$$

Es mag bemerkt werden, dass, während δ den Uebergangsfactor für die Ladungswelle darstellt, $\delta:\varepsilon$ den Uebergangsfactor für die Welle der elektrischen Kraft (gemessen in der Umgebung der Drähte) bedeutet. Denn diese elektrische Kraft ist in der Luft proportional zu e, in der Flüssigkeit proportional zu $e'':\varepsilon$.

Die Werthe, welche r und $\frac{\delta}{\varepsilon}$ für $\beta = 0$ annehmen, mögen auf die Form gebracht werden:

$$(128)\qquad \begin{aligned} \frac{n(1 - i\varkappa) - 1}{n(1 - i\varkappa) + 1} &= \mathfrak{r}\cdot e^{-i\,2\pi\Delta}, \\ \frac{2}{n(1 - i\varkappa) + 1} &= \mathfrak{d}\cdot e^{+i\,2\pi E}. \end{aligned}$$

$\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{d}$ geben die Amplitudenschwächung durch Reflexion und Uebergang an, $2\pi\Delta$ und $2\pi E$ die dabei eintretenden Phasenänderungen der einfallenden Wellen.

Man erhält aus (128):

$$(129)\begin{cases} \mathfrak{r}^2 = \frac{(n-1)^2 + n^2\varkappa^2}{(n+1)^2 + n^2\varkappa^2}, \quad \mathrm{tg}\, 2\pi\Delta = +\frac{2n\varkappa}{n^2 + n^2\varkappa^2 - 1}, \\ \text{wobei } 2\pi\Delta \text{ zwischen 0 und } +\frac{\pi}{2} \text{ liegt,} \\ \mathfrak{d}^2 = \frac{4}{(n+1)^2 + n^2\varkappa^2}, \quad \mathrm{tg}\, 2\pi E = +\frac{n\varkappa}{n+1}, \end{cases}$$

$2\pi E$ liegt zwischen 0 und $+\frac{\pi}{2}$.

Diese Formeln sind völlig dieselben, wie sie Gültigkeit haben, falls elektrische oder optische Wellen, die sich frei (ohne Drahtleitung) als ebene Wellen fortpflanzen, senkrecht auf die Oberfläche eines absorbirenden Körpers (z. B. eines Metalls), der den Brechungsindex n, den Absorptionsindex $\varkappa$ besitzt, auftreffen[1]. Es ist auch leicht einzusehen, weshalb man in beiden Fällen, d. h. bei freien ebenen Wellen, und bei Drahtwellen, zu denselben Resultaten gelangt, besonders wenn man zur Lösung der hier gestellten Fragen den Hertz'schen Weg geht, d. h. die Maxwell'schen Gleichungen des elektromagnetischen Feldes der Umgebung der Drähte integrirt. Es tritt dann die völlige Analogie beider Probleme sofort zu Tage.

Von diesem Hertz'schen Wege soll weiter unten noch mehr die Rede sein.

Wenn die Wellen nicht in Luft einfallen, sondern in Flüssigkeit, und zwar so, dass sich die einfallenden Wellen nach $-z$ fortpflanzen, und bei $z = \beta\lambda$ auf die Grenze Flüssigkeit-Luft stossen, so sind die Reflexions- und Uebergangsfactoren andere; sie mögen mit r' und δ' bezeichnet werden. Es ist dann zu setzen:

$$\mathfrak{e}' = \mathfrak{e}'_e + \mathfrak{e}'_r, \quad \mathfrak{i}' = \mathfrak{i}'_e + \mathfrak{i}'_r,$$

$$\mathfrak{e}'_e = A' \cdot e^{\alpha\frac{t}{T} + \alpha''\frac{z}{l'}},$$

$$\mathfrak{e}'_r = r'A' \cdot e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha''\frac{z}{l'}},$$

1) Vgl. z. B. des Verf. Physik des Äthers, p. 558. — Handbuch der Physik von Winkelmann, Bd. II, p. 824.

$$\mathfrak{e} = \delta' A' \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} + \alpha' \frac{z}{\lambda}},$$

$$i_e'' = - A' \cdot \frac{\alpha''}{\alpha \varepsilon} \frac{\lambda}{\lambda'} \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} + \alpha'' \frac{z}{\lambda'}},$$

$$i_r' = + r' A' \cdot \frac{\alpha''}{\alpha \varepsilon} \frac{\lambda}{\lambda'} \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} - \alpha'' \frac{z}{\lambda'}},$$

$$i = - \delta' A' \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} + \alpha' \frac{z}{\lambda}}.$$

Die Grenzbedingungen (123) liefern daher:

$$\varepsilon \delta' \cdot e^{\alpha' \beta} = e^{\alpha'' \beta n} + r' \cdot e^{-\alpha'' \beta n},$$

$$- \varepsilon \delta' \cdot e^{\alpha' \beta} = - n \frac{\alpha''}{\alpha} e^{\alpha'' \beta n} + r' n \frac{\alpha''}{\alpha} e^{-\alpha'' \beta n}.$$

Setzt man wieder wie vorhin $\frac{\alpha''}{\alpha} = 1 - i\varkappa$, d. h. schliesst man Fälle sehr grosser zeitlicher Dämpfung γ aus, so entsteht:

$$(130) \quad r' = + \frac{n(1 - i\varkappa) - 1}{n(1 - i\varkappa) + 1} e^{+2\alpha'' \beta n}, \quad \delta' \varepsilon = \frac{2n(1 - i\varkappa) \cdot e^{(n\alpha'' - \alpha')\beta}}{n(1 - i\varkappa) + 1}.$$

$\delta' \varepsilon$ bedeutet den Uebergangsfactor für die Welle der elektrischen Kraft (während δ den Uebergangsfactor für die Ladungswelle bedeutet), aus dem vorhin pag. 119 angeführten Grunde. Für $\beta = 0$ lassen sich aus den r' und $\delta' \varepsilon$ wiederum, wie vorhin, die Phasen- und Amplitudenänderungen bei Reflexion und Uebergang leicht ableiten. Es verdient vielleicht hervorgehoben zu werden, dass es für die bei Reflexion eintretende Amplitudenschwächung gleichgültig ist, von welcher Seite (ob in Luft, oder in Flüssigkeit) die Welle einfällt, dass aber die Uebergangsschwächung der Welle der elektrischen Kraft viel bedeutender ist, wenn die Welle von Luft in Flüssigkeit übergeht, als wenn sie umgekehrt verläuft. So ist nach (129) für Wasser, bei dem $n = 9$, $\varkappa = 0$, die Uebergangsschwächung im ersten Falle nach (129):

$$\mathfrak{d} = \frac{2}{n+1} = \frac{1}{5},$$

im zweiten Falle dagegen nach (130)

$$\mathfrak{d}' = \frac{2n}{n+1} = \frac{9}{5}.$$

Während also die übergehende elektrische Kraft beim Uebergang von Luft zu Wasser nur den fünften Theil der einfallenden Kraft beträgt,

ist sie beim umgekehrten Gang fast doppelt so gross, wie die einfallende Kraft. Ein Widerspruch mit dem Energieprincip folgt aus letzterem Umstande deshalb nicht, weil die elektrische Kraft allein noch nicht die ganze Energie des elektromagnetischen Feldes, welches sich in der Umgebung der Drähte befindet, ausmacht, sondern die magnetische Kraft dabei ebenfalls massgebend ist.

4) Vorhandensein einer Brücke in Luft und einer Grenze Luft — Flüssigkeit.

Es soll der Fall näher betrachtet werden, dass bei $z = 0$ in Luft eine Brücke B_1 über den Paralleldrähten liegt, und dass diese bei $z = \beta\lambda$ in eine bis $z = \infty$ reichende Flüssigkeit der Constanten ε und σ, oder n und $\varkappa$, eintreten. Es handelt sich um die Bestimmung der elektrischen Kraft P in einem beliebigen Punkte $z = p\lambda$ zwischen Brücke B_1 und Flüssigkeitsgrenze, wenn durch einen Erreger über die Brücke B_1 Ladungen von dem zeitlichen Verlauf:

$$\mathfrak{e} = e^{-\gamma\frac{t}{T}} \cos 2\pi\frac{t}{T} \text{ von } t = 0 \text{ bis } t = \infty$$

in die Paralleldrähte hineingesandt werden.

Die Aufgabe ist ganz analog der oben pag. 73 und pag. 90 behandelten bei Vorhandensein zweier Brücken: es sind die Reflexionen an der Flüssigkeitsgrenze zu berücksichtigen, deren Reflexionsfactor mit r bezeichnet sei, und an der Brücke B_1, deren Reflexionsfactor im Anschluss an die frühere Bezeichnung r' genannt werden möge. Für r' gilt die Formel (42) pag. 75, nämlich

$$r' = -\varrho \cdot e^{-\alpha\varphi},$$

wofür wir auch schreiben können, da φ ein kleiner Werth ist und α' sich nur um die sehr kleine Grösse τ von α unterscheidet:

$$r' = -\varrho \cdot e^{-\alpha'\varphi}; \tag{131}$$

dagegen gelten für den Reflexionsfactor an der Flüssigkeitsgrenze die Formeln (127), (128), die zusammengezogen werden können zu:

$$r = -\mathfrak{r} \cdot e^{-i2\pi\Delta} \cdot e^{-2\alpha'\beta}. \tag{132}$$

Die Formeln (75) bis (77) der pag. 91 können wir direct auf unseren Fall übertragen.

Nur die dortige Formel (78) erfährt eine Aenderung. Es ist nämlich hier:

$$(133)\quad rr' = \mathfrak{r}\varrho\, e^{-i2\pi\varDelta} \cdot e^{-\alpha'(\varphi+2\beta)} = \mathfrak{r}\varrho\, e^{(\gamma-\mathfrak{r})(\varphi+2\beta)} \cdot e^{-i2\pi(\varDelta+\varphi+2\beta)}.$$

Nach den dortigen Formeln (76) und (77) ergaben sich Maxima der elektrischen Kraft P für diejenigen Entfernungen β der Flüssigkeitsgrenze von der Brücke B_1, für welche rr' reell und positiv ist (Knotenentfernungen), Minima für diejenigen β, für welche rr' reell und negativ ist (Bauchentfernungen). Wenn rr' genügend nahe an 1 kommt, was bei starkem Reflexionsvermögen $\mathfrak{r}$, z. B. beim Wasser, eintritt, so ist für eine Knotenentfernung der Flüssigkeitsgrenze P bedeutend stärker, als für eine Bauchentfernung. Bei letzterer erreicht man dann gar kein Ansprechen eines Wellenindicators, selbst wenn hinter der Flüssigkeitsgrenze eine zweite Brücke B_2 geeignet zu legen versucht wird, weil die Wirkung der einfallenden Wellen durch die an der Flüssigkeitsgrenze reflectirten Wellen fast vollständig vernichtet wird. Nach (133) ist

für die Knotenentfernungen:

$$(134)\quad \begin{aligned} 2\beta &= k - \varDelta - \varphi, \ (k \text{ ganze Zahl}), \\ rr' &= +\,\mathfrak{r}\varrho \cdot e^{(\gamma-\mathfrak{r})(\varphi+2\beta)}, \end{aligned}$$

für die Bauchentfernungen:

$$(135)\quad \begin{aligned} 2\beta &= k + \tfrac{1}{2} - \varDelta - \varphi, \\ rr' &= -\,\mathfrak{r}\varrho \cdot e^{(\gamma-\mathfrak{r})(\varphi+2\beta)}. \end{aligned}$$

Ein Vergleich mit den Formeln (50) und (52), welche die Knoten- und Bauchlagen einer zweiten Brücke B_2 angeben, zeigt, dass diese mit den Knoten- und Bauchentfernungen der Flüssigkeit nicht übereinstimmen; letztere liegen um die constante Differenz:

$$(\varDelta - \varphi)\,\frac{\lambda}{2}$$

näher nach der Brücke B_1 zu, als die Knoten- und Bauchlagen einer zweiten Brücke. Wäre $\varDelta = 0$, so lägen die Knotenentfernungen um $\varphi\,\frac{\lambda}{2}$ weiter von B_1 entfernt, als die Knotenlagen einer zweiten Brücke B_2, d. h. nach Formel (36) um die Brückenverkürzung weiter. Diese Lagen habe ich in »Arbeit I« »wahre elektrische Knoten« genannt, weil an diesen Stellen auf den Paralleldrähten Knoten der

elektrischen Kraft sich ausbilden, wenn die Wellen an einer Brücke B_2 reflectirt werden, die in einer noch dahinter liegenden Knotenlage aufliegt. Da man φ experimentell bestimmen kann[1]), so ergiebt sich eine experimentelle Methode, um die an absorbirenden Substanzen auftretende absolute Phasenänderung zu bestimmen. Man braucht zu dem Zweck nur die Paralleldrähte von einer beliebigen Stelle an vertical nach unten zu biegen, und sie in ein grösseres Bassin der zu untersuchenden, absorbirenden Flüssigkeit, sagen wir z. B. wässrige Kupfersulfatlösung, tauchen zu lassen. Die Paralleldrähte müssen so lang sein, dass eine Reflexion an ihren Enden durch die Absorption der Wellen im Kupfersulfat sich nicht mehr bemerklich machen kann. Bei einigermassen concentrirten Lösungen genügt es, wenn die Drähte wenige Centimeter unter den Flüssigkeitsspiegel tauchen. Man verschiebt das Bassin in verticaler Richtung so lange, bis ein Wellenindicator, der zwischen Brücke B_1 und Flüssigkeitsgrenze angebracht ist, ein Maximum anzeigt. Der Vergleich einer so ermittelten Knotenentfernung, z. B. der ersten ($k = 1$), der Flüssigkeitsgrenze mit der ersten Brücken-Knotenlage liefert Δ, wenn man zuvor noch φ experimentell bestimmt oder theoretisch geschätzt hat.

In dieser Weise an wässrigen Kupfersulfatlösungen mit $\lambda = 75$ cm ausgeführte Experimente liessen wohl erkennen, dass Δ bei stärkerer Concentration merkliche Beträge annahm und positiv war, d. h. dass die erste Knotenentfernung der Flüssigkeitsgrenze näher nach der Brücke B_1 zu lag, als der erste wahre Knoten der elektrischen Kraft (welcher gleich der ersten Brücken-Knotenlage vermehrt um die Brückenverkürzung ist); aber da es sich hierbei immer nur um wenige Millimeter Verschiebung handelt, so konnte ich Δ mit einiger Genauigkeit nicht bestimmen. Folgende Tabelle giebt für wässrige Lösungen verschiedener Leitfähigkeit den nach (129) und der Tabelle der pag. 111 leicht zu berechnenden Werth von Δ und der Verschiebung $\Delta \frac{\lambda}{2}$ der ersten Knotenentfernung der Flüssigkeitsgrenze gegen den ersten wahren Knoten der elektrischen Kraft. Es ist $\lambda = 75$ cm angenommen.

---

1) »Arbeit I«, p. 30.

Absolute Phasenänderung durch Reflexion bei wässrigen Lösungen und $\lambda = 75$ cm.

$K \cdot 10^8$	5	25	50	75	100	125	150	175	200	250	380
$n\varkappa$	0,135	0,668	1,320	1,955	2,57	3,14	3,70	4,23	4,75	5,66	7,70
$n^2+n^2\varkappa^2$	81,0	82,0	84,8	89,0	95,0	101,4	108,8	116,2	123,0	145	200
Δ	0,0005	0,002	0,005	0,007	0,009	0,010	0,011	0,012	0,012	0,0125	0,0123
$\Delta \frac{\lambda}{2}$	0,2 mm	0,7	1,9	2,6	3,4	3,7	4,1	4,5	4,6	4,7	4,6

Man ersieht aus dieser Tabelle, dass Δ ein Maximum erreicht bei

$$K = 250 \cdot 10^{-8},$$

wobei K das auf Quecksilber als Einheit bezogene Leitvermögen bedeutet. Dies kann man auch aus der allgemeinen Formel (129) für $\operatorname{tg} 2\pi\Delta$ ableiten, wenn man darin für n und $\varkappa$ gemäss den Formeln (110) und (111) die von s abhängenden Werthe einführt, wobei s nach (106) direct der Leitfähigkeit σ oder K proportional ist. Aus (110) und (111) ergiebt sich:

$$(136) \qquad n\varkappa = \frac{s\sqrt{2\varepsilon}}{\sqrt{1+\sqrt{1+4s^2}}}, \quad n^2 + n^2\varkappa^2 = \varepsilon\sqrt{1+4s^2},$$

daher nach (129)

$$\operatorname{tg} 2\pi\Delta = \frac{2s\sqrt{2\varepsilon}}{\sqrt{1+\sqrt{1+4s^2}}\,(\varepsilon\sqrt{1+4s^2}-1)}.$$

Für sehr grosse Werthe von s wird dies zu

$$\operatorname{tg} 2\pi\Delta = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon s}},$$

daher nimmt Δ bei sehr grossem K wieder zu Null ab und erreicht ein Maximum für ein mittleres K. Durch Differentiation von $\operatorname{tg} 2\pi\Delta$ nach s ergiebt sich, dass bei grossem ε Δ ein Maximum erreicht bei $s = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ $(\varkappa = 1 : \sqrt{3})$, d. h. nach (106) für $\sigma = 31 \,.\, 10^{-12}$, $K = 292 \,.\, 10^{-8}$. Dieses Maximum ist $\operatorname{tg} 2\pi\bar{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}$, d. h. bei grossem ε:

$$\bar{\Delta} = \frac{1}{2\pi\sqrt{2\varepsilon}}.$$

Dass die absoluten Phasenänderungen elektrischer Wellen bei der Reflexion an wässrigen Lösungen immer nur sehr klein sind,

liegt daher an der grossen Dielektricitätsconstante ε, d. h. an dem starken Brechungsvermögen n derselben, wie es ja auch aus (129) unmittelbar hervorgeht.

Für eine Knoten- bezw. Bauchentfernung der Flüssigkeitsgrenze ist nach (134), (135) und (132)

$$r \cdot e^{2\alpha' p} = \mp \mathfrak{r} \cdot e^{(\gamma - \tau)(2\beta - 2p)} e^{i 2\pi (\varphi + 2p)}. \tag{137}$$

Gerade wie oben pag. 79 (vgl. Formel (61)) gezeigt wurde, sind die Maxima von P für diejenigen Punkte $\mathfrak{P}(p)$ zu erwarten, für welche

$$e^{i 2\pi (\varphi + 2p)} = -1,$$

d. h. z. B.

$$2p = \tfrac{1}{2} - \varphi \tag{138}$$

ist. In diesem Punkte wollen wir unseren Wellenindicator angebracht denken, d. h. in der Entfernung $p\lambda = \frac{\lambda}{4}(1 - 2\varphi)$ hinter der Brücke B_1. Es ist dies derselbe Punkt $\mathfrak{P}$, in welchem auch bei Reflexion an einer im Knoten liegenden zweiten Brücke B_2 in Luft die elektrische Kraft P am stärksten ist.

Wir wollen jetzt den Fall näher ins Auge fassen, dass die Flüssigkeitsgrenze in der ersten Knotenentfernung liegt, setzen also nach (134):

$$2\beta = 1 - \varDelta - \varphi, \quad r r' = \mathfrak{r} \cdot \varrho e^{(\gamma - \tau)(1 - \varDelta)}, \tag{139}$$

nach (137) und (138):

$$r \cdot e^{2\alpha' p} = + \mathfrak{r} \cdot e^{(\gamma - \tau)(\frac{1}{2} - \varDelta)}. \tag{140}$$

Dann werden nach den Formeln (75), wenn man die dort auftretenden successiven Zeitintervalle durch untere Indices kennzeichnet, die successiven Amplituden A_1, A_2, A_3 etc. der elektrischen Kraft (bei Absehung von den unwesentlichen Factoren $e^{-\gamma\eta - \tau p}$, $e^{-\gamma\vartheta - \tau p}$, vgl. oben pag. 93):

$$A_1 = 1,$$
$$A_2 = e^{-\gamma(\frac{1}{2} - \varDelta)} + \mathfrak{r} \cdot e^{-\tau(\frac{1}{2} - \varDelta)},$$
$$A_3 = e^{-\gamma(1 - \varDelta - \varphi)} + \mathfrak{r} \cdot e^{-\tau(\frac{1}{2} - \varDelta)} \cdot e^{-\gamma(\frac{1}{2} - \varphi)} + \mathfrak{r} \cdot \varrho e^{-\tau(1 - \varDelta)} \cdot e^{\gamma\varphi},$$

etc. etc.

Man kann die Glieder für ein beliebiges Zeitintervall summiren und eine der früheren Formel (90) (pag. 94) analoge Formel für die

grösste unter allen Amplituden A aufstellen, für die sogenannte Knotenstärke bei der Reflexion an der Flüssigkeit. Indess ist es für praktische Berechnungen bequemer, sich gewisser Recursionsformeln zu bedienen, die aus den soeben angedeuteten Reihen für die A_1, A_2 etc. leicht folgen. Setzt man nämlich:

$$(141) \qquad \begin{aligned} e^{-\gamma(\frac{1}{2}-\Delta)} &= m, & e^{-\gamma(\frac{1}{2}-\varphi)} &= m', \\ \mathfrak{r}\cdot\varrho e^{\gamma\varphi} e^{-\tau(1-\Delta)} &= n, & \mathfrak{r}\cdot e^{-\tau(\frac{1}{2}-\Delta)} &= n', \end{aligned}$$

so gelten folgende Recursionsformeln:

$$(142) \qquad \begin{aligned} A_1 &= 1, & A_2 &= m\cdot A_1 + 1\cdot n', \\ A_3 &= m'\cdot A_2 + n, & A_4 &= m\cdot A_3 + n\cdot n', \\ A_5 &= m'\cdot A_4 + n^2, & A_6 &= m\cdot A_5 + n^2\cdot n', \\ A_7 &= m'\cdot A_6 + n^3, & A_8 &= m\cdot A_7 + n^3\cdot n', \\ & & \text{etc. etc.} \end{aligned}$$

Man bemerkt die Analogie mit den früheren Formeln (93) für die Reflexion zwischen zwei Brücken.

Um eine deutliche Anschauung von dem zeitlichen Verlauf der elektrischen Kraft zu haben, soll die Reflexion an Wasser nach (142) berechnet werden, für welches nach (129) $\Delta = 0$, $\mathfrak{r} = 0{,}8$ ist. Ferner ist bei $\lambda = 75$ cm und einer Länge der Brücke B_1 von 1,8 cm $\varrho . e^{\gamma\varphi} = 0{,}991$; $\varphi = 0{,}02$ (cf. oben pag. 73 und pag. 97). Da schliesslich τ nach pag. 87 $= 0{,}00285$ ist, so folgt bei $\gamma = 0{,}15$ nach (141):

$$m = 1 : 1{,}078; \quad m' = 1 : 1{,}075;$$
$$n = 0{,}789; \quad n' = 0{,}800;$$

und nach (142):

$$\begin{aligned} A_1 &= 1, & A_2 &= 1{,}73, \\ A_3 &= 2{,}39, & A_4 &= 2{,}86, \\ A_5 &= 3{,}28, & A_6 &= 3{,}54, \\ A_7 &= 3{,}78, & A_8 &= 3{,}90, \\ A_9 &= 4{,}01, & A_{10} &= 4{,}03, \\ A_{11} &= 4{,}06, & A_{12} &= 4{,}01, \\ A_{13} &= 3{,}97, & A_{14} &= 3{,}88, \\ A_{15} &= 3{,}80, & A_{16} &= 3{,}67, \\ A_{17} &= 3{,}56. \end{aligned}$$

Es ergiebt sich hiernach der in der Tafel, Figur 1, graphisch dargestellte zeitliche Verlauf der elektrischen Kraft. Die Knotenstärke ist hiernach $K = A_{11} = 4{,}06$.

Man kann leicht experimentell bestimmen, für welche Knotenlage einer Brücke B_2 in Luft dieselbe Knotenstärke erreicht wird, wie sie hier die Wasserreflexion besitzt, und hat dadurch einen neuen experimentellen Weg, um die zeitliche Dämpfungsconstante γ zu bestimmen. Denn je nach der Grösse von γ muss offenbar das Resultat verschieden ausfallen. Je kleiner γ ist, um so höher muss die Ordnungszahl der Knotenlage der Brücke B_2 werden, welche gleiche Knotenstärke ergiebt, wie die Wasserreflexion. Denn eine Brücke B_2 (in Luft) ist hinsichtlich des Reflexionsvermögens der Wassergrenze überlegen. Um den Effect der an B_2 reflectirten Wellen zu schwächen, muss daher die Brücke B_2 auf einen weit entfernten Knoten geschoben werden, und zwar muss er um so weiter entfernt liegen, je kleiner γ ist, weil bei kleinem γ die Stärke eines selbst weit entfernten Knotens noch bedeutend ist (cf. oben pag. 82).

Diesen Versuch habe ich in folgender Weise angestellt: Die Paralleldrähte verliefen hinter der Brücke B_1 zunächst in Luft, sodann durchsetzten sie das Innere eines 30 cm langen Thontroges, welcher mit einer schwach concentrirten wässrigen Kupfersulfatlösung der Leitfähigkeit $K = 38 \cdot 10^{-8}$ angefüllt war. Eine solche Lösung verhält sich hinsichtlich ihrer Reflexionsconstanten $\mathfrak{r}$ und Δ noch wie reines Wasser, d. h. es ist $\mathfrak{r} = 0{,}8$, $\Delta = 0$. Andrerseits hindert trotzdem die durch die Leitfähigkeit der Lösung bewirkte Absorption der elektrischen Wellen, dass die an dem Ende des Troges reflectirten Wellen nach dem doppelten Durcheilen der 30 cm langen Drahtstrecke im Trog in bemerklicher Weise die Erscheinungen vor dem Flüssigkeitstrog modificiren. Dort sind also nur die Reflexionen an der Brücke B_1 und an der Flüssigkeitsgrenze wirksam. Die Flüssigkeitsgrenze war um die erste Knotenlage von B_1 entfernt, d. h. lag im ersten wahren Knoten der elektrischen Kraft (vgl. oben pag. 123).

Eine Vacuumröhre, die als Wellenindicator über die Drähte beim Punkte $\mathfrak{P}$ $(2p = \frac{1}{2} - \varphi)$, d. h. fast genau in der Mitte zwischen B_1 und Flüssigkeitsgrenze, gelegt war, sprach nicht an, falls

die Länge der Brücke B_1 2 cm, ja selbst 3 cm betrug. Erst bei der Brückenlänge $l = 4$ cm sprach sie gerade an.

Der Trog wurde nun fortgenommen und eine lange Luftleitung der Paralleldrähte hergestellt (ohne dass B_1 verschoben wurde). Durch Verschieben einer zweiten Brücke B_2 wurde gefunden, dass, falls diese Brücke im 17. Knoten lag ($k = 17$) des Ansprechen der Vacuumröhre dasselbe war, wie vorhin bei der Wasserreflexion, d. h. dass die Röhre bei kürzeren Längen der Brücke B_1 nicht mehr ansprach.

Berechnet man nun für $\gamma = 0{,}15$ und $k = 17$ die Knotenstärke K der Brückenreflexion nach den Formeln (92), (93), so ergiebt sich $K = 1{,}89$, d. h. wesentlich kleiner, als die vorhin berechnete Knotenstärke der Wasserreflexion. Es ist allerdings zu berücksichtigen, dass bei dieser Berechnung die Brückenverkürzung zu Grunde gelegt ist, die der 1,8 cm langen Brücke entspricht. Man kann die Modification, welche durch grössere Länge der Brücke B_1 ($l = 4$ cm) herbeigeführt wird, nach der oben behandelten Theorie leicht berechnen, sie ist aber sehr unbedeutend.

Aus diesem Versuch würde demnach für die zeitliche Dämpfungsconstante γ ein viel kleinerer Werth, nämlich $\gamma < 0{,}01$, folgen. Für den Werth $\gamma = 0{,}01$ ist die Knotenstärke der Wasserreflexion noch immer etwas grösser als die Brückenreflexion bei $k = 17$, nämlich es folgt bei $\gamma = 0{,}01$

für die Wasserreflexion:

$A_{1,3},\ldots$	1	2,57	3,81	4,76	5,50	6,06	6,48	6,80	7,04
$A_{2,4},\ldots$	1,80	3,20	4,29	5,13	5,78	6,27	6,64	6,92	7,13
$A_{19},\ldots$	7,21	7,31	7,37	7,41	7,41	7,39			
$A_{20},\ldots$	7,26	7,34	7,39	7,41	7,40				

für die Brückenreflexion:

$A_{1,3},\ldots$	1	2,72	4,07	5,10	5,86	6,41	6,79	7,01	7,13
$A_{2,4},\ldots$	1,79	3,19	4,28	5,09	5,69	6,12	6,38	6,54	6,60
$A_{19},\ldots$	7,15	7,08							
$A_{20},\ldots$	6,57								

Es ist also K (Wasser) $= 7{,}41$

K (Brücke) $= 7{,}15$.

Trotzdem halte ich aber den Werth $\gamma = 0{,}01$ für zu klein, weil an der Luftleitung sich nur 31 Knoten beobachten liessen und bei $\gamma = 0{,}01$ und $k = 31$ nach pag. 96 die Knotenstärke folgen würde zu $K = 4{,}12$, die Bauchstärke zu $B = 1{,}05$. Wenn thatsächlich K und B bei $k = 31$ noch so stark von einander verschieden sein sollten, so müssten bei der Empfindlichkeit der Vacuumröhre noch viel mehr Knoten als 31 beobachtbar sein.

Ich halte daher den oben für meine Versuche wahrscheinlich erklärten Werth $\gamma = 0{,}15$ auch jetzt noch für ungefähr richtig, und glaube, dass durch irgend einen störenden Umstand, vielleicht dadurch, dass die Drahtleitung zunächst die Trogwand durchsetzen muss, bevor sie in das Wasser eintritt, die Knotenstärke der Wasserreflexion bei dem Experimente geschwächt war. — Immerhin ist es interessant, diesen Punkt durch erneute Versuche aufzuklären. — Es wäre auch denkbar, dass zur Berechnung dieser Versuche der bisher gemachte Ansatz $P_0 = e^{-\gamma \frac{t}{T}} \cos 2\pi \frac{t}{T}$ nicht ausreicht. Streng genommen wird ja wahrscheinlich P_0 ein complicirteres Gesetz befolgen.

5) Vorhandensein einer Brücke in Luft, einer Grenze Luft-Flüssigkeit und einer Brücke in Flüssigkeit.

Dieser Fall ist deshalb von Wichtigkeit, weil er die Theorie für die Versuche ergiebt, bei denen durch Verschiebung einer Brücke B_2 in der Flüssigkeit Aufschluss über den Brechungsindex und den Absorptionsindex derselben gewonnen werden soll.

Eine feste Brücke B_1 liege in Luft bei $z = 0$ über den Drähten. Bei $z = \beta\lambda$ sei die Grenze Luft-Flüssigkeit, bei $z = \beta\lambda + \beta'\lambda'$ liege eine zweite Brücke B_2 über den Drähten in der Flüssigkeit. Der Reflexionsfactor an der Brücke B_1 sei r_1 genannt. Für ihn gilt die Gleichung (131):

$$r_1 = -\varrho \cdot e^{-\alpha'\varphi}, \tag{143}$$

wobei ϱ und φ durch die Formeln (33) definirt sind.

Der Reflexionsfactor an der Brücke B_2 sei r_2 genannt. Für ihn gilt die Gleichung (120), wenn man darin β' durch $\beta' + \beta n$ ersetzt:

$$r_2 = -\varrho' \cdot e^{-\alpha''(2\beta' + 2\beta n + \varphi')}, \tag{144}$$

wobei ϱ' und φ' durch die Gleichungen (122) definirt sind.

Der Reflexionsfactor an der Flüssigkeitsgrenze für in Luft einfallende Wellen sei r genannt. Für ihn gilt die Gleichung (132):

$$r = -\mathfrak{r} \cdot e^{-i2\pi\Delta} \cdot e^{-2\alpha'\beta}, \tag{145}$$

wobei $\mathfrak{r}$ und Δ durch die Formeln (129) definirt sind.

Der Uebergangsfactor (der elektrischen Kraft) von Luft zu Flüssigkeit sei δ genannt[1]. Für ihn gilt die Gleichung (127):

$$\delta = \frac{2e^{(n\alpha'' - \alpha')\beta}}{n(1 - i\varkappa) + 1}. \tag{146}$$

Der Uebergangsfactor (der elektrischen Kraft) von Flüssigkeit zu Luft sei δ' genannt[2]. Für ihn gilt die Gleichung (130):

$$\delta' = \frac{2n(1 - i\varkappa)}{n(1 - i\varkappa) + 1}\, e^{(n\alpha'' - \alpha')\beta}. \tag{147}$$

Wegen der wiederholten Reflexionen an den Brücken und der Flüssigkeitsgrenze nimmt die Aufgabe nun im Allgemeinen eine sehr complicirte Gestalt an. Wir wollen uns im Folgenden auf den Fall beschränken, dass die Wellen in der Flüssigkeit eine Absorption erleiden sollen, und zwar in dem Betrage, dass Wellen, welche die Strecke $\beta'\lambda'$ viermal durchlaufen haben, nur noch unmerklich kleine Amplituden besitzen sollen.

Ferner wollen wir unser Augenmerk auf die praktisch wichtigste Frage nach der elektrischen Kraft in der Luft, d. h. zwischen Brücke B_1 und Flüssigkeitsgrenze, richten. Für diese kommen dann nur Wellen in Betracht, welche beliebig viele Reflexionen an B_1 und der Flüssigkeitsgrenze, die aber höchstens eine einmalige Reflexion an der Brücke B_2 erlitten haben können. Die Wellen nämlich, welche öfter an ihr reflectirt sind, kommen nach obiger Voraussetzung wegen der durch Absorption der Flüssigkeit stark verkleinerten Amplitude nicht in Betracht.

Die einfallende Welle (P_0) erreicht den Punkt $\mathfrak{P}$ ($z = p\lambda$) zur Zeit $\frac{t}{T} = p$.

Sie habe den Werth:

$$P_0 = e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha' p} \quad \text{für } \frac{t}{T} > p.$$

---

1) Oben pag. 119 ist dieser Übergangsfactor mit $\frac{\delta}{\varepsilon}$ bezeichnet.

2) Oben pag. 121 ist dieser Übergangsfactor mit $\delta'\varepsilon$ bezeichnet.

Die einmal an der Flüssigkeitsgrenze reflectirte Welle erreicht $\mathfrak{P}$ zur Zeit $\frac{t}{T} = 2\beta - p$ und hat den Werth:

$$P_r = r \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} + \alpha' p} \text{ für } \frac{t}{T} > 2\beta - p.$$

Die einmal an der Grenze und einmal an der Brücke B_1 reflectirte Welle erreicht $\mathfrak{P}$ zur Zeit $\frac{t}{T} = 2\beta + p$ und hat den Werth:

$$P_{rr_1} = rr_1 \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} - \alpha' p} \text{ für } \frac{t}{T} > 2\beta + p.$$

Die zweimal an der Grenze und einmal an B_1 reflectirte Welle erreicht $\mathfrak{P}$ zur Zeit $\frac{t}{T} = 4\beta - p$ und hat den Werth:

$$P_{2rr_1} = r^2 r_1 \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} + \alpha' p} \text{ für } \frac{t}{T} > 4\beta - p.$$

Allgemein erreicht die h mal an der Grenze und h mal an B_1 reflectirte Welle den Punkt $\mathfrak{P}$ zur Zeit $\frac{t}{T} = 2h\beta + p$ und hat den Werth:

$$P_{hrhr_1} = (rr_1)^h \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} - \alpha' p} \text{ für } \frac{t}{T} > 2h\beta + p;$$

die $(h + 1)$ mal an der Grenze und h mal an B_1 reflectirte Welle erreicht $\mathfrak{P}$ zur Zeit $\frac{t}{T} = 2(h + 1)\beta - p$ und hat den Werth:

$$P_{(h+1)rhr_1} = r\,(rr_1)^h \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} + \alpha' p} \text{ für } \frac{t}{T} > 2\,(h + 1)\beta - p.$$

Die einmal an der Brücke B_2 reflectirte, sonst nicht reflectirte Welle erreicht $\mathfrak{P}$ zur Zeit $\frac{t}{T} = 2\beta + 2\beta' - p$ und hat den Werth

$$P' = \delta r_2 \delta' \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} + \alpha' p} \text{ für } \frac{t}{T} > 2\beta + 2\beta' - p.$$

Wird diese Welle an B_1 reflectirt, so erreicht sie $\mathfrak{P}$ zur Zeit $\frac{t}{T} = 2\beta + 2\beta' + p$ und hat den Werth:

$$P'_{r_1} = (\delta r_2 \delta')\, r_1 \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} - \alpha' p} \text{ für } \frac{t}{T} > 2\beta + 2\beta' + p.$$

Wird diese Welle dann an der Flüssigkeitsgrenze reflectirt, so erreicht sie $\mathfrak{P}$ zur Zeit $\frac{t}{T} = 4\beta + 2\beta' - p$ und hat den Werth:

$$P'_{r_1, r} = (\delta r_2 \delta') \, r_1 r \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} + \alpha' p} \text{ für } \frac{t}{T} > 4\beta + 2\beta' - p.$$

Zu derselben Zeit trifft aber auch in $\mathfrak{P}$ die Welle ein, welche zuerst an der Grenze, dann an B_1 und zuletzt an B_2 reflectirt worden ist. Diese hat den Werth:

$$P'_{r, r_1} = r r_1 (\delta r_2 \delta') \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} + \alpha' p} \text{ für } \frac{t}{T} > 4\beta + 2\beta' - p.$$

Der Werth ist also derselbe, wie der der Welle $P'_{r_1, r}$. Von der Zeit $\frac{t}{T} > 4\beta + 2\beta' - p$ an kommt also in $\mathfrak{P}$ eine elektrische Kraft $'P_{r_1 r}$ hinzu, welche den Werth hat:

$$'P_{r, r_1} = 2 r r_1 (\delta\delta' r_2) \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} + \alpha' p} \text{ für } \frac{t}{T} > 4\beta + 2\beta' - p.$$

Ebenso setzen sich die Wellen, welche eine Reflexion an B_2, eine Reflexion an der Grenze und eine zweimalige Reflexion an B_1 erlitten haben, aus zwei gleichen Bestandtheilen zusammen, die beide den Punkt $\mathfrak{P}$ zur Zeit $4\beta + 2\beta' + p$ erreichen. Von dieser Zeit an existirt also in $\mathfrak{P}$ auch eine elektrische Kraft des Werthes:

$$'P_{r, 2r_1} = 2 r r_1^2 (\delta\delta' r_2) \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} - \alpha' p} \text{ für } \frac{t}{T} > 4\beta + 2\beta' + p.$$

Allgemein setzt sich eine Welle, welche eine einmalige Reflexion an B_2, eine h-malige Reflexion an der Grenze und eine h-malige Reflexion an B_1 erlitten hat, aus $h + 1$ gleichen Bestandtheilen zusammen, welche den Punkt $\mathfrak{P}$ sämmtlich zur gleichen Zeit $\frac{t}{T} = 2(h+1)\beta + 2\beta' - p$ erreichen. Von dieser Zeit an existirt also in $\mathfrak{P}$ auch eine elektrische Kraft des Werthes:

$$'P_{hr, hr_1} = (h+1)(r r_1)^h (\delta\delta' r_2) \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} + \alpha' p} \text{ für } \frac{t}{T} > 2(h+1)\beta + 2\beta' - p.$$

Wellen, welche eine einmalige Reflexion an B_2, eine h-malige Reflexion an der Grenze und eine $(h+1)$-malige Reflexion an B_1 erlitten haben, setzen sich ebenfalls aus $h + 1$ gleichen Bestandtheilen zusammen, welche den Punkt $\mathfrak{P}$ sämmtlich zur gleichen Zeit $\frac{t}{T} = 2(h+1)\beta + 2\beta' + p$ erreichen. Von dieser Zeit an existirt also in $\mathfrak{P}$ auch eine elektrische Kraft des Werthes:

$$'P_{hr, (h+1) r_1} = (h+1) r_1 (r r_1)^h (\delta\delta' r_2) \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} - \alpha' p} \text{ für } \frac{t}{T} > 2(h+1)\beta + 2\beta' + p.$$

Wenn man nun die elektrische Kraft P im Punkte $\mathfrak{P}$ zu irgend einer Zeit t finden will, so sind alle diejenigen Wellen zu summiren, welche zu dieser Zeit t den Punkt $\mathfrak{P}$ schon erreicht haben. Wie aus dem Vorstehenden ersichtlich ist, sind Zeitpunkte von den vier verschiedenen Formen zu unterscheiden:

$$2h\beta+p,\quad 2(h+1)\beta-p,\quad 2(h+1)\beta+2\beta'-p,\quad 2(h+1)\beta+2\beta'+p,$$

wobei h eine ganze positive Zahl oder Null ist. Je nach der Grösse von β' ist nun die wirkliche Reihenfolge dieser Zeitpunkte verschieden.

Die Zeitpunkte, welche von β' nicht abhängen, bilden die Reihenfolge:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ p & 2\beta-p & 2\beta+p & 4\beta-p & 4\beta+p & 6\beta-p & 6\beta+p, \end{array}$$

die Zeitpunkte, welche von β' abhängen, bilden die Reihenfolge:

$$\begin{array}{ccccc} 1' & 2' & 3' & 4' & 5' \\ 2\beta+2\beta'-p & 2\beta+2\beta'+p & 4\beta+2\beta'-p & 4\beta+2\beta'+p & 6\beta+2\beta'-p. \end{array}$$

Diese treten nun zwischen die Reihenfolge 1, 2, 3, 4, 5 etc., jedoch ist der Beginn ihres Zwischentretens je nach der Grösse von β' verschieden.

Für $0 < 2\beta' < \genfrac{}{}{0pt}{}{2p}{2\beta-2p}$ ist die Reihenfolge:

$$\text{A)}\quad \begin{array}{ccccccccccccc} 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & & 7 \\ & & & 1' & & 2' & & 3' & & 4' & & 5' & \end{array} \quad \text{etc.},$$

für $\genfrac{}{}{0pt}{}{2p}{2\beta-2p} < 2\beta' < 2\beta$:

$$\text{B)}\quad \begin{array}{ccccccccccccc} 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & & 7 \\ & & & & & 1' & & 2' & & 3' & & 4' & \end{array} \quad \text{etc.},$$

für $2\beta < 2\beta' < \genfrac{}{}{0pt}{}{2\beta+2p}{4\beta-2p}$:

$$\text{C)}\quad \begin{array}{ccccccccccccc} 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & & 7 \\ & & & & & & & 1' & & 2' & & 3' & \end{array} \quad \text{etc.},$$

für $\genfrac{}{}{0pt}{}{2\beta+2p}{4\beta-2p} < 2\beta' < 4\beta$:

$$\text{D)}\quad \begin{array}{ccccccccccccc} 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & & 7 \\ & & & & & & & & & 1' & & 2' & \end{array} \quad \text{etc.},$$

für $4\beta < 2\beta' < \genfrac{}{}{0pt}{}{4\beta+2p}{6\beta-2p}$:

$$\text{E)}\quad \begin{array}{ccccccccccccc} 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & & 7 \\ & & & & & & & & & & & 1' & \end{array} \quad \text{etc.}$$

Setzt man zur Abkürzung:

(148) $$\delta\delta' r_2 = r',$$

so ist also im Falle A):

$$p < \frac{t}{T} < 2\beta - p: \qquad P = e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha' p},$$

$$2\beta - p < \frac{t}{T} < 2\beta + 2\beta' - p: \quad P = e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha' p}\left\{1 + r\cdot e^{2\alpha' p}\right\},$$

$$2\beta + 2\beta' + p < \frac{t}{T} < 2\beta + p: \qquad P = e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha' p}\left\{1 + r\cdot e^{2\alpha' p} + r'\cdot e^{2\alpha' p}\right\},$$

$$2\beta + p < \frac{t}{T} < 2\beta + 2\beta' + p: \quad P = e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha' p}\left\{1 + rr_1 + r\cdot e^{2\alpha' p} + r'\cdot e^{2\alpha' p}\right\},$$

(149) $$2\beta + 2\beta' + p < \frac{t}{T} < 4\beta - p: \qquad P = e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha' p}\left\{1 + rr_1 + r'r_1 + (r + r')\cdot e^{2\alpha' p}\right\},$$

$$4\beta - p < \frac{t}{T} < 4\beta + 2\beta' - p:$$

$$P = e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha' p}\left\{1 + r_1(r + r') + r(1 + rr_1)\cdot e^{2\alpha' p} + r'\cdot e^{2\alpha' p}\right\},$$

$$4\beta + 2\beta' - p < \frac{t}{T} < 4\beta + p:$$

$$P = e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha' p}\left\{1 + r_1(r + r') + r(1 + rr_1)\cdot e^{2\alpha' p} + r'(1 + 2rr_1)\cdot e^{2\alpha' p}\right\},$$

etc. etc.

Die Fälle A), C), E) etc. sind dadurch gekennzeichnet, dass ist:

𝔄) $$2\beta' = a\cdot 2\beta + \mu,$$

die Fälle B), D), F) etc., dass ist

𝔅) $$2\beta' = a\cdot 2\beta - \mu;$$

dabei bedeutet a eine ganze Zahl, d. h. $a = 0, 1, 2, \ldots$, μ ist ein positiver Werth, der liegt zwischen:

(150) $$0 < \mu < \frac{2p}{2\beta - 2p}.$$

Setzt man nun

(151) $$1 + rr_1 + (rr_1)^2 + (rr_1)^3 + \cdots + (rr_1)^h = M_h,$$

(152) $$1 + 2rr_1 + 3(rr_1)^2 + 4(rr_1)^3 + \cdots + h(rr_1)^{h-1} = N_h,$$

und $r' = r\cdot r''$,

so gilt allgemein, dass für die Fälle 𝔄) der zeitliche Verlauf der elektrischen Kraft P ist:

$$
(153)\begin{cases}
2h\beta + p < \frac{t}{T} < 2h\beta + p + \mu: \\
P = e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha' p} \cdot \left\{ M_h + r\cdot e^{2\alpha' p} M_{h-1} + r'' r_1 r N_{h-a-1} + r'' r\cdot e^{2\alpha' p} N_{h-a} \right\}, \\
2h\beta + p + \mu < \frac{t}{T} < 2(h+1)\beta - p: \\
P = e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha' p} \cdot \left\{ M_h + r\cdot e^{2\alpha' p} M_{h-1} + r'' r_1 r N_{h-a} + r'' r\cdot e^{2\alpha' p} N_{h-a} \right\}, \\
2(h+1)\beta - p < \frac{t}{T} < 2(h+1)\beta - p + \mu: \\
P = e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha' p} \cdot \left\{ M_h + r\cdot e^{2\alpha' p} M_h + r'' r_1 r N_{h-a} + r'' r\cdot e^{2\alpha' p} N_{h-a} \right\}, \\
2(h+1)\beta - p + \mu < \frac{t}{T} < 2(h+1)\beta + p: \\
P = e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha' p} \cdot \left\{ M_h + r\cdot e^{2\alpha' p} M_h + r'' r_1 r N_{h-a} + r'' r\cdot e^{2\alpha' p} N_{h-a+1} \right\}.
\end{cases}
$$

Für die Fälle $\mathfrak{B}$) ist der zeitliche Verlauf der elektrischen Kraft:

$$
(154)\begin{cases}
2h\beta + p < \frac{t}{T} < 2(h+1)\beta - p - \mu: \\
P = e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha' p} \cdot \left\{ M_h + r\cdot e^{2\alpha' p} M_{h-1} + r'' r_1 r N_{h-a} + r'' r\cdot e^{2\alpha' p} N_{h-a} \right\}, \\
2(h+1)\beta - p - \mu < \frac{t}{T} < 2(h+1)\beta - p: \\
P = e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha' p} \cdot \left\{ M_h + r\cdot e^{2\alpha' p} M_{h-1} + r'' r_1 r N_{h-a} + r'' r\cdot e^{2\alpha' p} N_{h-a+1} \right\}, \\
2(h+1)\beta - p < \frac{t}{T} < 2(h+1)\beta + p - \mu: \\
P = e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha' p} \cdot \left\{ M_h + r\cdot e^{2\alpha' p} M_h + r'' r_1 r N_{h-a} + r'' r\cdot e^{2\alpha' p} N_{h-a+1} \right\}, \\
2(h+1)\beta + p - \mu < \frac{t}{T} < 2(h+1)\beta + p: \\
P = e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha' p} \cdot \left\{ M_h + r\cdot e^{2\alpha' p} M_h + r'' r_1 r N_{h-a+1} + r'' r\cdot e^{2\alpha' p} N_{h-a+1} \right\}.
\end{cases}
$$

Dabei bedeuten h ganze Zahlen von Null an, der Werth der ganzen Zahl a richtet sich nach dem Werthe von $2\beta'$ gemäss den Gleichungen $\mathfrak{A}$) und $\mathfrak{B}$); sollte durch Einsetzen specieller Werthe a der untere Index an N negativ oder Null werden, so ist das entsprechende N gleich Null zu setzen.

In diesen Formeln stellen die ersten beiden, von M_h bezw. M_{h-1} abhängenden Glieder den Werth der elektrischen Kraft dar, wie er

sich durch alleinige Reflexionen an der Flüssigkeitsgrenze und der Brücke B_1 bilden würde. Er ist der überwiegende Theil, falls, wie wir voraussetzten, die Absorption in der Flüssigkeit sich so bemerkbar macht, dass Wellen, die zweimal an der Brücke B_2 reflectirt sind, überhaupt nicht mehr in Betracht kommen. Hinsichtlich der Abhängigkeit der elektrischen Kraft von β können wir daher das im vorigen Abschnitt gewonnene Resultat benutzen: P ist ein Maximum, falls rr_1 reell und positiv ist (Knotenentfernungen der Flüssigkeitsgrenze). Wir wollen speciell jetzt voraussetzen, es liege die Flüssigkeitsgrenze in der ersten Knotenentfernung[1]), d. h. es sei nach (139) (dort bedeutet r' dasselbe, was hier r_1 bedeutet):

$$(155) \qquad 2\beta = 1 - \varDelta - \varphi, \quad rr_1 = \mathfrak{r} \cdot \varrho e^{(\gamma - \mathfrak{r})(1 - \varDelta)} .$$

Ferner wollen wir annehmen, dass als Punkt $\mathfrak{P}$ derjenige gewählt ist, in welchem sich die Wirkung der elektrischen Kraft am besten beobachten lässt, d. h. nach (138) sei

$$(156) \qquad 2p = \tfrac{1}{2} - \varphi .$$

Dann ist nach (140):

$$(157) \qquad r \cdot e^{2\alpha' p} = \mathfrak{r} \cdot e^{(\gamma - \mathfrak{r})(\frac{1}{2} - \varDelta)} .$$

In welcher Weise nun die elektrische Kraft mit der Lage der Brücke B_2 in der Flüssigkeit variirt, ist jetzt leicht aus den Formeln (153) und (154) zu erkennen. Die Lage der Brücke B_2 kommt in dem Werthe von β' zur Geltung. β' tritt nur in dem Factor r'' auf. Da rr_1, M_h, N_h und $r . e^{2\alpha' p}$ bei den getroffenen Verfügungen reelle Grössen sind, so ist die elektrische Kraft ein Maximum, wenn

r'' positiv reell

ist (Knotenlagen der Brücke B_2), ein Minimum, wenn

r'' negativ reell

ist (Bauchlagen von B_2). Dieses Resultat wäre ganz dasselbe geblieben, wenn wiederholte Reflexionen an B_2 berücksichtigt wären,

1) Dieser Fall ist bei hohem Reflexionsvermögen $\mathfrak{r}$ praktisch allein wichtig, da, wie oben pag. 123 betont wurde, nur bei Knotenentfernungen der Flüssigkeitsgrenze die Wirkung der Verschiebung einer Brücke B_2 in der Flüssigkeit deutlich beobachtbar ist.

denn der Unterschied wäre nur der, dass für P analoge Formeln wie (153), (154) gelten, in welchen nur die Factoren: rr_1, $re^{2\alpha' p}$, r'' (letzteres in höheren Potenzen als der ersten) auftreten. Sind erstere beiden Factoren reell, so muss es auch der letzte (r'') sein, falls P ein Maximum oder Minimum hinsichtlich β' sein soll. Die hier bestimmten Knoten- bezw. Bauchlagen der Brücke B_2 gelten also auch für Versuche in nicht-absorbirenden Substanzen.

Nun ist nach den Formeln (127), (144), (146), (147), (148) und (152):

$$(158)\qquad r'' = \frac{4\varrho' n\,(1 - i\varkappa)\cdot e^{-\alpha''(2\beta' + \varphi')}}{[n(1 - i\varkappa) + 1]\,[n(1 - i\varkappa) - 1]}.$$

Setzt man

$$(159)\qquad \frac{n(1 - i\varkappa)}{\{n(1 - i\varkappa) + 1\}\{n(1 - i\varkappa) - 1\}} = \mathfrak{r}'\cdot e^{i2\pi\Delta'},$$

d. h.

$$(160)\qquad \mathfrak{r}'^2 = \frac{n^2(1 + \varkappa^2)}{\{(n + 1)^2 + n^2\varkappa^2\}\{(n - 1)^2 + n^2\varkappa^2\}},\qquad \operatorname{tg} 2\pi\Delta' = \varkappa\,\frac{n^2(1 + \varkappa^2) + 1}{n^2(1 + \varkappa^2) - 1},$$

wobei $2\pi\Delta'$ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegt, so wird

$$r'' = 4\varrho'\mathfrak{r}'\cdot e^{i2\pi\Delta'}\cdot e^{-\alpha''(2\beta' + \varphi')},$$

oder da

$$\alpha'' = -\gamma + \tau + 2\pi\varkappa + 2\pi i,$$

so ist

$$(161)\qquad r'' = 4\varrho'\mathfrak{r}'\cdot e^{(\gamma - \tau - 2\pi\varkappa)(2\beta' + \varphi')}\cdot e^{-i2\pi(2\beta' + \varphi' - \Delta')}.$$

Daher sind die Knotenlagen der Brücke B_2:

$$(162)\qquad 2\beta' + \varphi' - \Delta' = 1, 2, \cdots k \cdots,$$

die Bauchlagen von B_2:

$$(163)\qquad 2\beta' + \varphi' - \Delta' = \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{2} \cdots k - \tfrac{1}{2} \cdots.$$

Dabei bedeutet k eine ganze Zahl, die mindestens gleich 1 ist.

Die successiven Bauch- und Knotenlagen von B_2 haben daher einen constanten Abstand von $\frac{1}{4}\lambda'$. Man erhält also, wenn die Flüssigkeitsgrenze in einer Knotenentfernung von der Brücke B_1 liegt, Aufschluss über die wahre Wellenlänge λ' in der Flüssigkeit durch Einstellung der Brücke B_2 auf die Bauch- bezw. Knotenlagen. Bei einer absorptionsfreien oder

wenig absorbirenden Flüssigkeit, für welche keine merkliche Phasenänderung Δ der Reflexion auftritt, fallen die Knotenentfernungen der Flüssigkeitsgrenze nach pag. 123 in die wahren elektrischen Knoten des Drahtsystems. Diese Knotenentfernung habe ich daher bei meinen früher beschriebenen[1]) Versuchen an Wasser und anderen Flüssigkeiten gewählt, weil man dann richtige Werthe ihrer Brechungsexponenten erhalten muss.

Die Entfernung $\beta'\lambda'$ der ersten Bauchlage von der Flüssigkeitsgrenze muss nach (163) je nach Δ', d. h. dem Absorptionsindex, nach λ', d. h. dem Brechungsindex, und nach φ', d. h. der Länge des Bügels B_2, eine verschiedene sein. Mit zunehmender Absorption, d. h. wachsendem Δ', wird nach (163) β' grösser, da ausserdem nach pag. 115 φ' mit zunehmendem $\varkappa$ kleiner wird. Da aber mit zunehmender Absorption λ' kleiner wird, wenigstens wenn die Dielektricitätsconstante der Flüssigkeit einen festen Werth behält, so ist nicht ohne Weiteres klar, ob die Bäuche und Knoten von B_2 mit zunehmender Absorption nach der Flüssigkeitsgrenze hinrücken, oder ob sie sich von ihr entfernen.

Folgende Tabelle enthält die Berechnung für wässrige Lösungen verschiedener Leitfähigkeit bei $\lambda = 75$ cm. Es ist dabei die Dielektricitätsconstante ε fest zu 81 angenommen worden. Die Formel (160) vereinfacht sich bei der Grösse von $n^2(1+\varkappa^2)$ zu $\operatorname{tg} 2\pi\Delta' = \varkappa$. φ' ist nach (122) zu entnehmen. Der Berechnung sind zwei Bügellängen $l_1 = 1{,}8$ cm und $l_2 = 1$ cm zu Grunde gelegt. Dem entsprechend ist φ' mit φ'_1 und φ'_2 bezeichnet. Die Grösse

$$b'_{1,2} = (\tfrac{1}{2} + \Delta' - \varphi'_{1,2})\frac{\lambda'}{2}$$

bedeutet die Entfernung der ersten Bauchlage des B_2 vom Flüssigkeitsanfang, die unteren Indices beziehen sich auf die beiden verschiedenen Brückenlängen l_1 und l_2.

---

1) »Arbeit I und II«.

Abhängigkeit der ersten Bauchlage des B_2 von der Leitfähigkeit.

$K \cdot 10^8$	5	25	50	75	100	125	150	175	200	250	380
$\varkappa$	0,015	0,074	0,145	0,212	0,274	0,329	0,380	0,427	0,466	0,531	0,647
$\frac{\lambda'}{2}$	4,16 cm	4,15	4,12	4,07	4,00	3,93	3,86	3,79	3,68	3,52	3,15
Δ'	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,06	0,07	0,08	0,09
φ_1'	0,14	0,14	0,14	0,13	0,13	0,13	0,12	0,12	0,11	0,10	0,09
φ_2'	0,10	0,10	0,10	0,09	0,09	0,09	0,09	0,08	0,08	0,08	0,07
b_1'	1,50 cm	1,53	1,57	1,63	1,64	1,65	1,70	1,67	1,69	1,69	1,58
b_2'	1,66	1,70	1,73	1,79	1,80	1,81	1,81	1,85	1,80	1,76	1,64

Die b' ändern sich also weit weniger, als die $\frac{\lambda'}{4}$. Ohne Berücksichtigung des wechselnden Δ' und φ' hätte sich der erste Bauch um etwa 5 mm der Flüssigkeitsgrenze nähern müssen, wenn K von 0 auf $380 \cdot 10^{-8}$ gewachsen ist, während er nach der Tabelle bei diesen beiden extremen K ungefähr gleich liegt und für ein mittleres K eine maximale Verschiebung von nur etwa 2 mm zeigt. — Beobachtungen, welche in dieser Weise angestellt worden sind, dass die Flüssigkeitsgrenze immer in die erste Knotenentfernung gelegt ist, ergaben, dass die Lage des ersten Bauches nahezu unabhängig von K ist.

Die Verschiebung der ersten Bauchlage des B_2 mit wachsendem $\varkappa$, d. h. wachsender Leitfähigkeit K, ist bequemer und einwandsfreier zu beobachten, wenn man die Grenze Flüssigkeit-Luft in fester Lage gegen die Brücke B_1 belässt, etwa in der ersten Knotenentfernung, die $\varkappa = 0$ entspricht. Bei allmählichem Zusatz von Salz kann man dann bequem die Verschiebung des ersten Bauches beobachten. In dieser Weise wurden die von mir in der Arbeit II beschriebenen Versuche an wässrigen Lösungen angestellt. — Die strenge Theorie dieser Versuche ist sehr complicirt, weil jetzt die Gleichungen (153), (154) hinsichtlich ihrer Abhängigkeit von β' zu discutiren sind, wobei die Grösse rr_1, d. h. auch M_h und N_h, nicht mehr reell ist.

Eine angenäherte Theorie kann man sich verschaffen, indem man festsetzt, dass in den Formeln (153), (154) bei der ersten Bauchlage des β' die grössten Glieder, welche von β', d. h. r'', abhängen, den Einfluss der grössten Glieder, welche von r'' unabhängig sind, möglichst zu hemmen suchen. Man erhält dann das Resultat, dass

die ersten Bauchlagen näher nach der Flüssigkeitsgrenze zu liegen müssen, als es in voriger Tabelle berechnet ist.

Die Beobachtungen[1]) ergeben, dass die erste Bauchlage nahezu dieselbe ist, wie sie bei constanter Brückenverkürzung (constantem φ') allein der wechselnden Wellenlänge λ' entsprechen würde. Dieses Resultat folgt theoretisch nicht, vielmehr sind die Entfernungen der ersten Bauchlage von der Flüssigkeitsgrenze immer noch grösser, als die beobachteten Werthe. — Wenn man die Rechnung als völlig bindend anerkennen wollte, so würde sich hieraus ergeben, dass bei hohen Leitfähigkeiten (von $K = 125 . 10^{-8}$ an) die Wellenlänge λ' in der Lösung kleiner ist, als sie hier unter Annahme einer constanten Dielektricitätsconstante berechnet wurde, d. h. dass die Dielektricitätsconstante bei grosser Leitfähigkeit zunimmt. Indess wird man diesen Schluss nicht mit Sicherheit ziehen können, da die theoretische Berechnung (auch hinsichtlich der Variation des φ') zu unsicher ist.

Jedenfalls geht aus dem Vorstehenden hervor, dass die Lage der ersten Bauchlage allein, wenn man sie auf geringe Bruchtheile der Wellenlänge λ' berechnen will, in sehr complicirter Weise von der Leitfähigkeit der Lösung und der Länge der angewandten Brücke B_2 abhängt. Einen zuverlässigen Werth für die Wellenlänge λ' in der Flüssigkeit kann man daher nur erhalten, wenn ausser dem ersten Bauch mindestens noch der erste Knoten mit der Brücke B_2 beobachtbar ist.

Auch die Theorie der anderen Erscheinungen, welche eintreten, wenn der Flüssigkeitsanfang nicht genau in einer Knotenentfernung von der Brücke B_1 entfernt liegt, und welche ich in der »Arbeit II« pag. 339, 340 für Wasser beschrieben habe, lässt sich mit Strenge wohl kaum ableiten, weil die Rechnungen zu complicirt werden. Das Hauptresultat, dass die Wellenlänge λ' etwas zu klein ausfällt, wenn der Flüssigkeitsanfang etwas näher, als eine Knotenentfernung, an die Brücke B_1 heranrückt, dagegen etwas zu gross im umgekehrten Falle, kann man sich in folgender Weise plausibel machen: Infolge des starken Reflexionsvermögens r wirkt der Wasseranfang fast wie

---

1) Vergl. »Arbeit II«, p. 353, 354.

eine über die Drähte gelegte Brücke. Eine solche verkürzt die Eigenschwingungsdauer des zwischen ihr und der Brücke B_1 liegenden Theiles der Paralleldrähte, wenn sie der Brücke B_1 genähert wird. Wenn daher der Flüssigkeitsanfang um etwas weniger von der Brücke B_1 entfernt ist, als der ersten Knotenentfernung entspricht, so ist die Grundschwingung des zwischen B_1 und dem Flüssigkeitsanfang liegenden Theiles des Drahtsystems von etwas kürzerer Periode, als die Periode T des Erregers. Die Knotenlagen der Brücke B_2 in der Flüssigkeit werden Lagen entsprechen, für die weder volle Resonanz mit dem Erreger, noch mit dem zwischen B_1 und der Flüssigkeitsgrenze liegenden Theil der Paralleldrähte eintritt, sondern Lagen, die zwischen diesen beiden Werthen liegen. Daraus erkennt man, dass die Wellenlänge λ' in der Flüssigkeit kleiner wird, wenn die Flüssigkeitsgrenze an B_1 heranrückt, aber nicht in gleichem Verhältniss mit der Verschiebung der letzteren zur Wellenlänge λ in Luft. So beträgt nach »Arbeit II« pag. 324 bei Verschiebung der Flüssigkeitsgrenze um 1 cm, d. h. bei Aenderung der Eigenschwingungsdauer um 2,7 %, die Aenderung des λ' nur etwa $\frac{1}{2}$ %. Die procentische Aenderung des λ' wird sich um so mehr der procentischen Verschiebung der Flüssigkeitsgrenze nähern, je geringer die zeitliche Dämpfung der Eigenschwingungen des Theiles der Paralleldrähte ist, der zwischen Brücke B_1 und Flüssigkeitsanfang abgegrenzt ist, d. h. je grösser das Reflexionsvermögen $\mathfrak{r}$ ist. — Das Resultat, dass sich der erste Bauch der Brücke B_2 dem Flüssigkeitsanfang nähert, wenn dieser sich von der Brücke B_1 entfernt, erhält man theoretisch in ähnlicher Weise bei nicht-absorbirenden Flüssigkeiten, wie es hier oben für absorbirende angedeutet worden ist. Experimentell wurde festgestellt (Arbeit II, pag. 340), dass, falls der Flüssigkeitsanfang von der Brücke B_1 um a mm zurückgeschoben wurde, der erste Bauch um 0,22 a mm sich der Flüssigkeitsgrenze nähert.

Im Folgenden soll wieder vorausgesetzt werden, dass die Flüssigkeitsgrenze genau um die erste Knotenentfernung von der festen Brücke B_1 abstehe.

Es gelte also die Relation (155), die wir auch so schreiben können:

$$(164) \qquad 2\beta + \varphi = 1 - \varDelta, \quad r r_1 = \mathfrak{r}\varrho \cdot e^{(\gamma - \mathfrak{i})(2\beta + \varphi)}.$$

Ferner ist nach (157):

$$r \cdot e^{2\alpha' p} = \mathfrak{r} \cdot e^{(\gamma - \mathfrak{z})(\frac{1}{2} - \varDelta)}. \tag{165}$$

Es soll nun das im Laufe der Zeit erreichte Maximum der elektrischen Kraft P untersucht werden, wenn die Brücke B_2 in einer Knotenlage, bezw. einer Bauchlage liegt, d. h. die Knotenstärke, bezw. Bauchstärke der Brücke B_2. Für erstere ist annähernd $2\beta' = k \,.\, 2\beta$, für letztere annähernd $2\beta' = k \,.\, 2\beta - \frac{1}{2}$, wobei die ganze Zahl k die Ordnungszahl des Knotens, bezw. Bauches bedeutet. Wir können beide Fälle sowohl als einen Fall $\mathfrak{A}$) der pag. 135 auffassen, als einen Fall $\mathfrak{B}$). Thun wir das erstere, so sind die Formeln (153) anzuwenden, thun wir das letztere, so sind die Formeln (154) anzuwenden. Das Resultat bleibt in beiden Fällen gleich. Wenden wir z. B. letztere Formeln an.

Für eine Knotenlage ist die Grösse μ der Formel $\mathfrak{B}$) sehr klein, da annähernd $2\beta' = k \,.\, 2\beta$ ist. Daher ist das zweite und vierte Zeitintervall der Formeln (154) sehr klein. Wir brauchen nur das erste und dritte der dortigen Zeitintervalle zu berücksichtigen. Dies sind nahezu die Zeitintervalle, die oben auf pag. 76 als Zeitintervalle I und II bezeichnet sind. Nennen wir die entsprechenden elektrischen Kräfte P_{I} und P_{II}, so ist also

für den k^{ten} Knoten der Brücke B_2:

$$(166)\quad \begin{aligned} P_{\mathrm{I}} &= e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha' p} \cdot \left\{ M_h + r \cdot e^{2\alpha' p} \cdot M_{h-1} + r''\left[r r_1 \cdot N_{h-k} + r \cdot e^{2\alpha' p} \cdot N_{h-k} \right] \right\}, \\ P_{\mathrm{II}} &= e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha' p} \cdot \left\{ M_h + r \cdot e^{2\alpha' p} \cdot M_h + r''\left[r r_1 \cdot N_{h-k} + r \cdot e^{2\alpha' p} \cdot N_{h-k+1} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Für eine Bauchlage des B_2 ist die Grösse μ der Formel $\mathfrak{B}$) nahezu gleich $\frac{1}{2}$, da annähernd $2\beta' = k \,.\, 2\beta - \frac{1}{2}$ ist. Daher ist das erste und dritte Zeitintervall der Formeln (154) sehr klein. Durch Berücksichtigung allein der zweiten und vierten der dortigen Zeitintervalle erhält man

für den k^{ten} Bauch der Brücke B_2:

$$(167)\quad \begin{aligned} {}_{\mathrm{I}}P &= e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha' p} \cdot \left\{ M_h + r \cdot e^{2\alpha' p} \cdot M_{h-1} + r''\left[r r_1 N_{h-k} + r \cdot e^{2\alpha' p} N_{h-k+1} \right] \right\}, \\ {}_{\mathrm{II}}P &= e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha' p} \cdot \left\{ M_h + r \cdot e^{2\alpha' p} M_h + r''\left[r r_1 N_{h-k+1} + r \cdot e^{2\alpha' p} N_{h-k+1} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Die unteren Indices I und II haben hier dieselbe Bedeutung, wie in den Formeln (166). — Nach pag. 78, Formeln (55), (56), ist für das Zeitintervall I zu setzen:

$$(168) \qquad \frac{t}{T} = 2h\beta + p + \eta, \text{ wobei } 0 < \eta < 2\beta - 2p,$$

für das Zeitintervall II:

$$(169) \qquad \frac{t}{T} = 2(h+1)\beta - p + \vartheta, \text{ wobei } 0 < \eta < 2p.$$

Die M_h und N_h sind nach den Formeln (151) der pag. 135 definirt. Man kann die dort auftretende Summation leicht ausführen und erhält

$$(170) \qquad M_h = \frac{(rr_1)^{h+1} - 1}{rr_1 - 1}, \quad N_h = \frac{h(rr_1)^h}{rr_1 - 1} - \frac{(rr_1)^h - 1}{(rr_1 - 1)^2}.$$

Sieht man nun von den unwesentlichen Factoren $e^{-\gamma\tau} . e^{-\tau p}$ bezw. $e^{-\gamma\vartheta} . e^{-\tau p}$ ab[1]), und setzt zur Abkürzung (cf. oben pag. 93, Formeln (84), (87)):

$$(171) \qquad \begin{gathered} \mathfrak{r} e^{-\tau(1-\Delta)} \cdot \varrho\, e^{\gamma\varphi} = f, \quad e^{2\gamma\beta} = g, \\ 1 + \frac{e^{\frac{\tau-\gamma}{2}}}{\varrho} = a, \quad 1 + fg\,\frac{e^{\frac{\tau-\gamma}{2}}}{\varrho} = a', \end{gathered}$$

so wird nach (164) und (165):

$$(172) \qquad \begin{gathered} rr_1 = fg = \frac{a'-1}{a-1} = \mathfrak{r}\varrho e^{(\gamma-\tau)(1-\Delta)} \\ r \cdot e^{2\alpha' p} = a' - 1 = \mathfrak{r} e^{(\gamma-\tau)(\frac{1}{2}-\Delta)}, \end{gathered}$$

und es werden die Amplituden der elektrischen Kraft

im k^{ten} Knoten:

$$(173) \qquad \begin{aligned} A_{\mathrm{I}} = \frac{g}{fg-1} \Big\{ & a f^{h+1} - a' g^{-(h+1)} \\ & + r'' a f g^{-k} \Big[(h-k) f^{h-k} - \frac{f^{h-k} - g^{-(h-k)}}{fg-1} \Big] \Big\}, \end{aligned}$$

$$(174) \qquad \begin{aligned} A_{\mathrm{II}} = \frac{g}{fg-1} e^{-\gamma(\frac{1}{2}-\Delta)} \Big\{ & a' \big(f^{h+1} - g^{-(h+1)} \big) \\ & + r'' f g^{-k} \Big[(h-k+1) a' f^{h-k} - a g \frac{f^{h-k+1} - g^{-(h-k+1)}}{fg-1} \Big] \Big\}; \end{aligned}$$

---

1) Vgl. dazu die Bemerkung der p. 93.

im k^{ten} Bauch:

$$
(175)\quad \begin{aligned} {}_{\mathrm{I}}A = \frac{g}{fg-1}\Big\{ & a f^{h+1} - a' g^{-(h+1)} \\ & + r'' f g^{-k}\Big[(h-k+1)a' f^{h-k} - a g \frac{f^{h-k+1} - g^{-(h-k+1)}}{fg-1}\Big]\Big\}, \end{aligned}
$$

$$
(176)\quad \begin{aligned} {}_{\mathrm{II}}A = \frac{g}{fg-1} e^{-\gamma(\frac{1}{2}-\Delta)}\Big\{ & a'\big(f^{h+1} - g^{-(h+1)}\big) \\ & + r'' a f g^{-(k-1)}\Big[(h-k+1) f^{h-k+1} - \frac{f^{h-k+1} - g^{-(h-k+1)}}{fg-1}\Big]\Big\}. \end{aligned}
$$

Wenn man die maximalen Werthe ermitteln will, die diese Amplituden im Laufe der Zeit, d. h. durch Veränderung des h annehmen, d. h. die Knotenstärken K und Bauchstärken B der Brücke B_2, so sind die Differentialquotienten der A nach h gleich Null zu setzen. Die diesen Gleichungen genügenden h entsprechen denjenigen Zeiten, zu welchen die A ihr Maximum erreichen, wenigstens wenn man als h die der Wurzel der Gleichung $\frac{\partial A}{\partial h} = 0$ zunächst benachbarte ganze Zahl wählt. Im Folgenden soll h als continuirliche Veränderliche betrachtet (cf. oben pag. 94) und für h direct die Wurzel der Gleichung $\frac{\partial A}{\partial h} = 0$ genommen werden. Die so berechneten maximalen Amplituden von A, d. h. die K und B, unterscheiden sich sehr wenig von den Werthen, die dem ganzzahligen h entsprechen, weil in der Nähe des zeitlichen Maximums die A wenig mit h variiren (vgl. die beiden oben pag. 127 und pag. 129 berechneten Beispiele der Wasserreflexion).

Der Ausdruck $\frac{\partial A}{\partial h} = 0$ ist im Allgemeinen eine ziemlich complicirte transcendente Gleichung für h, welche bei negativem r'', d. h. in den Bauchlagen, zwei positive Wurzeln besitzt, während für die Knotenlagen (positivem r'') nur eine positive Wurzel h existirt. Unter der Bauchstärke B ist dann das grösste der beiden von A im Laufe der Zeit erreichten Maxima zu verstehen. Es ergeben sich so für wenig absorbirendes Wasser ($\varkappa < 0{,}1$) der in der Figur 2 der Tafel gezeichnete[1]) Verlauf der Knoten- und Bauchstärken bei $\lambda = 75$ cm,

1) Als Ordinaten sind die K und B aufgetragen, als Abscissen die Lage der Brücke B_2. Die Werthe der elektrischen Kraft, die Zwischenlagen der Brücke B_2 zwischen einem Knoten und einem Bauch entsprechen, sind nicht berechnet, sondern nur graphisch interpolirt, damit die Veränderung der K und B besser zur Anschauung kommt.

d. h. $\lambda' = 8{,}3$ cm und $\gamma = 0{,}34$, bezw. $\gamma = 0{,}22$. — Da noch der 8. Knoten im Wasser einstellbar war (vgl. Arbeit II, pag. 319, Beobachtungsreihe 2)), so erkennt man direct aus den Curven, dass bei den Versuchen γ jedenfalls kleiner als 0,34 und wahrscheinlich auch kleiner als 0,22 war.

Einfacher wird die Berechnung der K und B, wenn die Absorption in der Flüssigkeit so bedeutend ist, d. h. wenn r'' (Formel (161)) so klein ist, dass der mit ihm multiplicirte Term in den Formeln (173) bis (176) nur als Correctionsglied zu behandeln ist. Diese einfachen Verhältnisse treten ein, wenn es sich um Berechnung der Anzahl der mit einem Wellenindicator bestimmter Empfindlichkeit nachweisbaren Knoten und Bäuche der Brücke B_2 handelt.

Für den letzten beobachtbaren Knoten bezw. Bauch ist offenbar der mit r'' multiplicirte Term sehr klein, und zwar um so mehr, je empfindlicher der Wellenindicator ist. — In diesen Fällen ist dasjenige h, welches dem Maximum der Amplituden A entspricht, dasselbe[1]), wie es ohne Vorhandensein einer Brücke B_2, d. h. für $r'' = 0$, sein würde.

Im Zeitintervall I ist daher für dieses h nach (173), (175):

$$a \lg f \cdot f^{h+1} + a' \lg g \cdot g^{-(h+1)} = 0\,,$$

(177) d. h.

$$(fg)^{h+1} = -\frac{a' \lg g}{a \lg f}\,,$$

im Zeitintervall II nach (174), (176):

$$\lg f \cdot f^{h+1} + \lg g \cdot g^{-(h+1)} = 0\,,$$

(178) d. h.

$$(fg)^{h+1} = -\frac{\lg g}{\lg f}\,.$$

Setzt man die den Gleichungen (177), (178) entsprechenden Werthe der h in die Formeln (173) bis (176) ein, so ergeben sich die Knoten- und Bauchstärken für kleines r''. Setzt man zur Abkürzung:

1) Dies tritt genügend genau ein, wenn das von r'' abhängende Glied nicht mehr als etwa 5 bis 6 % beträgt. Ich habe mich davon durch numerische Rechnung überzeugt.

$$(179) \qquad -\frac{a' \lg g}{a \lg f} = a_1'', \quad -\frac{\lg g}{\lg f} = a_2'',$$

so ist nach (177)

$$(180) \qquad \text{im Zeitintervall I:} \quad h_1 + 1 = \frac{\lg a_1''}{\lg (fg)},$$

$$(181) \qquad \text{im Zeitintervall II:} \quad h_2 + 1 = \frac{\lg a_2''}{\lg (fg)}.$$

Setzt man nun schliesslich

$$(182) \qquad g^{-1} = f : c,$$

wobei nach (172)

$$(183) \qquad c = \mathfrak{r}\varrho \cdot e^{(\gamma - \iota)(1 - \Delta)} = fg,$$

so wird nach (173) und (177) die

Knotenstärke im. k^{ten} Knoten:

$$(184) \quad K_k^{\mathrm{I}} = \frac{g f^{h_1 + 1}}{fg - 1} \left\{ a - \frac{a'}{a_1''} + \frac{r'' a}{c^k} \left[h_1 - k - \frac{1 - \frac{c^{k+1}}{a_1''}}{c - 1} \right] \right\},$$

$$(185) \quad K_k^{\mathrm{II}} = \frac{g f^{h_2 + 1}}{fg - 1} e^{-\gamma(\frac{1}{2} - \Delta)} \left\{ a' - \frac{a'}{a_2''} + \frac{r''}{c^k} \left[(h_2 - k + 1) a' - a c \frac{1 - \frac{c^k}{a_2''}}{c - 1} \right] \right\},$$

die Bauchstärke im k^{ten} Bauch:

$$(186) \quad B_k^{\mathrm{I}} = \frac{g f^{h_1 + 1}}{fg - 1} \left\{ a - \frac{a'}{a_1''} + \frac{r''}{c^k} \left[(h_1 - k + 1) a' - a c \frac{1 - \frac{c^k}{a_1''}}{c - 1} \right] \right\},$$

$$(187) \quad B_k^{\mathrm{II}} = \frac{g f^{h_2 + 1}}{fg - 1} e^{-\gamma(\frac{1}{2} - \Delta)} \left\{ a' - \frac{a'}{a_1''} + r'' \frac{a}{c^{k-1}} \left[h_2 - k + 1 - \frac{1 - \frac{c^k}{a_2''}}{c - 1} \right] \right\}.$$

Dabei ist nach (161), (162) und (163)

für den k^{ten} Knoten:

$$(188) \qquad r'' = 4 \varrho' \mathfrak{r}' \cdot e^{(\gamma - \iota - 2\pi x)(k + \Delta')},$$

für den k^{ten} Bauch:

$$(189) \qquad r'' = -4 \varrho' \mathfrak{r}' \cdot e^{(\gamma - \iota - 2\pi x)(k + \Delta' - \frac{1}{2})}.$$

Ob in dem Zeitintervall I oder in dem Zeitintervall II die absolut grössten Werthe des A erreicht werden, d. h. ob $K_k^{\mathrm{I}} \gtrless K_k^{\mathrm{II}}$ ist, berechnet man am besten numerisch in wirklich vorliegenden Fällen. Wie aber schon die beiden oben pag. 127 und pag. 129 berechneten Beispiele lehren, unterscheidet sich in der Nähe des Maximums K^{I} wenig von K^{II}.

Die Anzahl $\bar{k}$ der beobachtbaren Knoten und Bäuche ergiebt sich an der Hand der Formeln (184) bis (187) daraus, dass sein muss:

$$\frac{K_{\bar{k}}}{B_{\bar{k}}} = 1 + \nu,$$

wobei ν das oben pag. 83 definirte Maass der Empfindlichkeit des Wellenindicators ist. Wir wollen die Aufgabe zunächst umgekehrt behandeln, nämlich aus beobachtetem $\bar{k}$ des Empfindlichkeitsmaass ν berechnen, um zu sehen, ob dasselbe annähernd mit der Annahme über ν übereinstimmt, die oben pag. 99 zur Schätzung von γ gemacht ist.

Bei wässrigen Lösungen habe ich für $\lambda = 75$ cm früher[1]) die Anzahl $\bar{k}$ beobachtbarer Knoten angegeben. Es wurde immer derselbe Wellenindicator benutzt, nämlich eine auf Resonanz abgestimmte Zehnder'sche Röhre. Die dortigen Angaben sind hier durch einige Beobachtungen noch ergänzt. Die Länge der Brücke B_2 betrug 1,8 cm.

Für	$K = 25 \cdot 10^{-8}$	war einstellbar der	3te Knoten,	nicht der	4te Knoten,
-	$K = 60 \cdot 10^{-8}$	- - -	2te -	- -	3te Bauch,
-	$K = 83 \cdot 10^{-8}$	- - -	2te Bauch,	- -	3te Knoten,
-	$K = 100 \cdot 10^{-8}$	- - -	1te Knoten,	- -	2te Bauch,
-	$K = 170 \cdot 10^{-8}$	- kaum - -	1te -	- -	2te -
-	$K = 210 \cdot 10^{-8}$	war einstellbar -	1te Bauch,	- -	1te Knoten,
-	$K = 380 \cdot 10^{-8}$	- kaum - -	1te - .		

Es ergeben sich nun bei $\lambda = 75$ cm und $\gamma = 0,15$ folgende Werthe der in den Formeln auftretenden Grössen, falls als Dielectricitätsconstante $\varepsilon = 81$ bei allen Leitfähigkeiten[2]) festgehalten wird:

$$g = 1,16; \quad \varrho = 0,988; \quad e^{\gamma\varphi} = 1,003; \quad a = 1,94.$$

1) Vgl. »Arbeit I«, p. 17.

2) Ausser den soeben angeführten Leitfähigkeiten sind in der Tabelle noch mehr der Rechnung zu Grunde gelegt, weil diese weiter unten zur Berechnung der Absorptionsindices von Flüssigkeiten mit anomaler Absorption benutzt werden sollen.

$K \cdot 10^8$	25	60	75	80	83	100	170	180	210	380
$\varkappa$	0,074	0,172	0,212	0,224	0,233	0,274	0,417	0,435	0,480	0,647
τ	0,800	0,808	0,810	0,813	0,814	0,820	0,840	0,841	0,855	0,888
τ'	0,112	0,109	0,107	0,106	0,106	0,104	0,094	0,093	0,086	0,071
ϱ'	0,670	0,684	0,687	0,687	0,689	0,690	0,688	0,688	0,673	0,628
Δ	0,002	0,003	0,007	0,007	0,008	0,009	0,012	0,012	0,012	0,012
Δ'	0,01	0,02	0,03	0,03	0,03	0,04	0,06	0,06	0,07	0,09
f	0,792	0,800	0,802	0,805	0,806	0,812	0,831	0,832	0,846	0,879
c	0,920	0,928	0,930	0,934	0,935	0,941	0,964	0,965	0,982	1,020
a'	1,860	1,870	1,872	1,874	1,875	1,882	1,904	1,905	1,920	1,955
a_1''	0,616	0,645	0,653	0,666	0,670	0,700	0,796	0,800	0,880	1,170
a_2''	0,643	0,670	0,677	0,690	0,694	0,721	0,813	0,816	0,890	1,160
h_1+1	5,80	5,85	5,87	5,95	5,95	5,87	6,22	6,26	6,95	7,65
h_2+1	5,30	5,35	5,40	5,42	5,41	5,39	5,66	5,70	6,41	7,49
$-a+\frac{a'}{a_1''}$	1,08	0,96	0,93	0,88	0,86	0,75	0,45	0,44	0,24	−0,27[1]
$-a'+\frac{a'}{a_2''}$	1,03	0,92	0,90	0,85	0,83	0,73	0,44	0,43	0,24	−0,27
$4\varrho'\tau'$	0,300	0,298	0,294	0,292	0,292	0,287	0,259	0,256	0,232	0,179

Nach den Formeln (184) bis (189) folgt nun an der Hand obiger Tabelle:

für $K = 25 \cdot 10^{-8}$:

beim 3ten Knoten: $r'' = +0,116$; $K_3^{\text{I}} = 3,23(1+0,054)$; $K_3^{\text{II}} = 3,19(1+0,060)$,
beim 4ten Knoten: $r'' = +0,084$; $K_4^{\text{I}} = 3,23(1+0,006)$; $K_4^{\text{II}} = 3,19(1+0,029)$;

---

1) Diese Umkehr des Vorzeichens hängt damit zusammen, dass für die Leitfähigkeit $K = 380 \cdot 10^{-8}$ $c = fg > 1$ ist, während es sonst < 1 ist. Für ein zwischen 210 und $380 \cdot 10^{-8}$ liegendes K muss $c = fg = 1$ sein. Dann werden die Formeln (184) bis (187) unbrauchbar. Man kann sie in diesem speciellen Falle leicht durch andere, einfacher gebaute, ersetzen, die daraus folgen, dass für $fg = 1$ ist: $M_h = h$, $N_h = \frac{h(h+1)}{1 \cdot 2}$. — Die numerischen Werthe der in den Formeln (184) bis (187) auftretenden Grössen müssen um so genauer berechnet werden, je näher die Leitfähigkeit K an die kritische herankommt, für welche $fg = 1$ ist, weil die Formeln (184) bis (187) die Grösse $fg - 1$ im Nenner enthalten. Aus diesem Grunde sind die Resultate, welche für $K = 210 \cdot 10^{-8}$ und $K = 380 \cdot 10^{-8}$ erhalten sind, etwas weniger genau, als die bei den anderen Leitfähigkeiten erhaltenen.

für $K = 60 \cdot 10^{-8}$:

beim 2ten Knoten: $r'' = +0{,}0455$; $K_2^{I} = 4{,}20(1 + 0{,}046)$; $K_2^{II} = 4{,}20(1 + 0{,}040)$,
beim 3ten Bauch: $r'' = -0{,}0273$; $B_3^{I} = 4{,}20(1 - 0{,}020)$; $B_3^{II} = 4{,}20(1 - 0{,}020)$;

für $K = 75 \cdot 10^{-8}$:

beim 2ten Knoten: $r'' = +0{,}0267$; $K_2^{I} = 4{,}22(1 + 0{,}028)$; $K_2^{II} = 4{,}24(1 + 0{,}035)$;

für $K = 80 \cdot 10^{-8}$.

beim 2ten Bauch: $r'' = -0{,}0425$; $B_2^{I} = 4{,}25(1 - 0{,}059)$; $B_2^{II} = 4{,}30(1 - 0{,}056)$,
beim 2ten Knoten: $r'' = +0{,}0226$; $K_2^{I} = 4{,}25(1 + 0{,}022)$; $K_2^{II} = 4{,}30(1 + 0{,}022)$.

für $K = 83 \cdot 10^{-8}$:

beim 2ten Bauch: $r'' = -0{,}0312$; $B_2^{I} = 4{,}25(1 - 0{,}047)$; $B_2^{II} = 4{,}30(1 - 0{,}047)$,
beim 2ten Knoten: $r'' = +0{,}0150$; $K_2^{I} = 4{,}25(1 + 0{,}017)$; $K_2^{II} = 4{,}30(1 + 0{,}019)$;

für $K = 100 \cdot 10^{-8}$:

beim 1ten Knoten: $r'' = +0{,}0558$; $K_1^{I} = 4{,}36(1 + 0{,}104)$; $K_1^{II} = 4{,}39(1 + 0{,}097)$,
beim 2ten Bauch: $r'' = -0{,}0254$; $B_2^{I} = 4{,}36(1 - 0{,}039)$; $B_2^{II} = 4{,}39(1 - 0{,}039)$;

für $K = 170 \cdot 10^{-8}$:

beim 1ten Knoten: $r'' = +0{,}0190$; $K_1^{I} = 4{,}60(1 + 0{,}031)$; $K_1^{II} = 4{,}65(1 + 0{,}029)$.
beim 2ten Bauch: $r'' = -0{,}0055$; $B_2^{I} = 4{,}60(1 - 0{,}007)$; $B_2^{II} = 4{,}65(1 - 0{,}007)$;

für $K = 180 \cdot 10^{-8}$:

beim 1ten Knoten: $r'' = +0{,}0164$; $K_1^{I} = 4{,}60(1 + 0{,}031)$; $K_1^{II} = 4{,}65(1 + 0{,}027)$;

für $K = 210 \cdot 10^{-8}$

beim 1ten Bauch: $r'' = -0{,}0452$; $B_1^{I} = 4{,}82(1 - 0{,}100)$; $B_1^{II} = 4{,}71(1 - 0{,}051)$,
beim 1ten Knoten: $r'' = +0{,}0108$; $K_1^{I} = 4{,}82(1 + 0{,}034)$; $K_1^{II} = 4{,}71(1 + 0{,}008)$;

für $K = 380 \cdot 10^{-8}$:

beim 1ten Bauch: $r'' = -0{,}0179$; $B_1^{I} = 5{,}84(1 - 0{,}021)$; $B_1^{II} = 5{,}58(1 - 0{,}058)$

Die Zahlen für die K und B sind in der Weise geschrieben, dass immer das zu 1 additiv oder subtractiv hinzutretende Glied den Einfluss des Verhandenseins der Brücke B_2 angiebt.

Ein Vergleich dieser Zahlen mit der oben pag. 148 angegebenen Tabelle, welche die mit Hülfe der Zehnder'schen Röhre einstellbaren Knoten angiebt, lehrt, dass ein Knoten, bezw. Bauch der Brücke, noch einstellbar ist, falls sein Einfluss mindestens 3 % des ohne B_2 eintretenden Werthes der elektrischen Kraft beträgt; eine Ausnahme

findet nur beim 2. Bauch für $K = 100 . 10^{-8}$ statt. Sein Einfluss beträgt etwa 4 %, er müsste also einstellbar sein, während die Beobachtungen ihn als nicht einstellbar bezeichneten. — Die Zahlen, welche für $K = 210 . 10^{-8}$ und $K = 380 . 10^{-8}$ angegeben sind, sind übrigens aus dem oben pag. 149 Anm. 1 angeführten Grunde mit grösseren Rechnungsfehlern behaftet.

Das so erhaltene Resultat für die Empfindlichkeit der Zehnder'schen Röhre als Wellenindicator steht mit der oben pag. 83, 99 zur Schätzung von γ gemachten Annahme in gutem Einklang. Dort wurde angenommen, dass die Stärke des letzten, gerade noch bemerkbaren Knotens mehr als $\frac{1}{2}$ %, aber weniger als 5 % von der Stärke des benachbarten Bauches verschieden sein müsse. — Hier, bei der Einstellbarkeit der Knoten, bezw. Bäuche, handelt es sich nicht um den gegenseitigen Unterschied ihrer Stärken, sondern um den Unterschied ihrer Stärken gegenüber der Stärke beim Fehlen der Brücke B_4, denn die Einstellbarkeit eines Knotens erfordert offenbar mehr, als nur die Constatirung eines Unterschiedes vom Knoten mit dem benachbarten Bauch. Ersterer Unterschied liegt nun ebenfalls zwischen $\frac{1}{2}$ % und 5 %. — Man kann also auf diesem Wege mit ziemlicher Genauigkeit die Empfindlichkeit des Wellenindicators feststellen; mit Benutzung des so erhaltenen Resultates kann man dann rückwärts auf dem oben pag. 98 angegebenen Wege die zeitliche Dämpfung γ genauer berechnen, als dort geschehen ist. — Indess hat dies bei der geringen Grösse von γ hier nicht viel Interesse, da es wenig ausmachen würde, wenn wir etwa statt mit dem Werthe $\gamma = 0{,}15$ mit dem Werthe $\gamma = 0{,}13$ rechnen würden.

Es ist sehr bemerkenswerth, dass für die verschiedenste Leitfähigkeit der wässrigen Lösungen ungefähr gleiche Empfindlichkeit des Wellenindicators berechnet worden ist. Dies spricht dafür, dass für die Absorption selbst der angewandten sehr schnellen elektrischen Schwingungen nur die bei sehr langsamen Wechselströmen gemessene Leitfähigkeit der Lösung massgebend ist, und dass der theoretisch berechnete Absorptionscoefficient als den Thatsachen entsprechend anzusehen ist.

6) Vorhandensein dreier Brücken.

Wenn man die Wellenlänge durch Verschieben einer zweiten Brücke B_2 bestimmt, während eine erste Brücke B_1 fest liegen bleibt, so ist es nicht immer gleichgültig für die Bestimmung der Lagen von B_2, in denen die elektrische Kraft zwischen B_1 und B_2 ein Maximum oder Minimum zeigt, ob hinter B_2 noch eine dritte Brücke aufgelegt ist oder nicht. Die Eigenschaften des Drahtsystems hinter B_2 kommen nämlich nur dann überhaupt nicht in Betracht für die elektrische Kraft vor B_2, wenn der Uebergangsfactor der Wellen über B_2 gleich Null angenommen werden kann. Je grösser derselbe wird, um so mehr kann sich eine Störung der Erscheinungen vor B_2 dadurch geltend machen, dass sich eine dritte Brücke B_3 hinter B_2 befindet, oder dass eine Flüssigkeitsgrenze dicht hinter B_2 liegt. Da wir nun oben pag. 73 und pag. 116 gesehen haben, dass bei kurzen Brückenlängen der Uebergangsfactor sehr klein ist, wenn die Brücken in Luft aufliegen, dagegen sehr beträchtlich, wenn sie im Wasser aufliegen, so ist es erklärlich, dass, wie ich in Arbeit I. pag. 33 und Arbeit II. pag. 317 angegeben habe, keine Störung durch eine dritte Brücke B_3 bei Bestimmung der Wellenlänge λ in Luft wahrzunehmen ist, wohl aber bei Bestimmung der Wellenlänge λ' in Wasser, falls B_3 genügend nahe an B_2 liegt. Berechnet sollen diese Störungen nicht werden, ich möchte hier nur darauf hinweisen, dass auch die Theorie die Möglichkeit dieser sonst nicht beachteten Fehlerquelle ergiebt; wie man sie praktisch behandeln kann, habe ich in der Arbeit II. pag. 327 erwähnt.

B. Der die Drähte umgebende Körper zeigt Dispersion und anomale Absorption.

In diesem Falle ist die in dem Körper fortgepflanzte Welle der elektrischen Kraft in derselben Weise zu schreiben, wie sie oben pag. 108 in der Formel (103) für sich normal verhaltende Körper aufgestellt worden ist, nämlich:

$$\mathfrak{e} = A_1 e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha'\frac{z}{\lambda'} - 2\pi\varkappa\frac{z}{\lambda'}} + A_2 e^{\alpha\frac{t}{T} + \alpha'\frac{z}{\lambda'} + 2\pi\varkappa\frac{z}{\lambda'}},$$

wobei $\alpha = -\gamma + i2\pi$, $\alpha' = \alpha + \tau$ und λ' die Bedeutung der Wellenlänge im Körper, $\varkappa$ die seines Absorptionsindex besitzt. Es

besteht jetzt nur der Unterschied gegen früher, dass λ' und $\varkappa$ nicht aus dem Verhalten des Körpers bei sehr langsamen Wechselzahlen, d. h. aus seiner Dielektricitätsconstante und seiner gewöhnlich gemessenen Leitfähigkeit theoretisch berechnet werden können, sondern dass λ' und $\varkappa$ zwei für eine bestimmte Schwingungsdauer T dem Körper individuelle Constanten sind, die nur dem Experiment entnommen werden können. Es handelt sich nun vor allen Dingen um die Frage, wie letzteres zu geschehen habe, d. h. wie man den elektrischen Brechungsexponenten $\lambda : \lambda'$ und den Absorptionsindex $\varkappa$ einer anomal sich verhaltenden Flüssigkeit experimentell bestimmen kann.

Die Bestimmung des Brechungsexponenten geschieht einfach durch Beobachtung der Knoten- und Bauchlagen einer Brücke B_2 in der Flüssigkeit; zur Bestimmung des Absorptionscoefficienten liegt es nahe, die zu untersuchende Flüssigkeit mit einer anderen von bekanntem Absorptionsindex zu vergleichen. So habe ich[1]) mit der, auch vorhin der Rechnung zu Grunde gelegten Anordnung, dass die Flüssigkeitsgrenze in der ersten Knotenentfernung von einer festen Brücke B_1 lag, während in der Flüssigkeit eine Brücke B_2 verschoben wurde, für eine Reihe von Flüssigkeiten mit anomaler Absorption festgestellt, mit welcher wässrigen Lösung eines Elektrolyten sie sich insofern gleich verhielten, dass für beide dieselbe Anzahl Knoten, bezw. Bäuche mit der Brücke B_2 beobachtbar ist. Es mögen zwei sich in dieser Weise gleich verhaltende Flüssigkeiten »scheinbar isoabsorbirend« genannt werden. Man ist nur dann berechtigt, für beide Körper, wässrige Lösung und anomale Flüssigkeit, gleichen Absorptionsindex anzunehmen, wenn ihre Brechungsexponenten nahezu einander gleich sind. Sind sie stark von einander verschieden, so sind auch die Reflexions- und Uebergangsfactoren der elektrischen Wellen für beide Flüssigkeiten sehr verschieden. Bei grossem Brechungsexponenten ist wegen der starken Reflexion an der Flüssigkeitsgrenze und der verhältnissmässig schwachen an der Brücke B_2 (cf. oben pag. 116) eine Knotenlage der Brücke B_2 selbst ohne Absorption der Flüssigkeit weniger deutlich bemerkbar, als bei kleinem Brechungsexponenten.

1) Vgl. »Arbeit I«.

Wenn daher, wie es meist der Fall ist, eine Flüssigkeit einen kleineren elektrischen Brechungsexponenten besitzt als eine gewisse wässrige Lösung eines Elektrolyten, für welche die Anzahl beobachtbarer Knoten der Brücke B_2 und die Deutlichkeit des letzten dieser beobachtbaren Knoten dieselbe ist, wie für die erste Flüssigkeit, so muss trotzdem die Flüssigkeit einen etwas grösseren Absorptionsindex besitzen, als die scheinbar isoabsorbirende wässrige Lösung.

Die exacte Vergleichung der Absorptionscoefficienten beider Flüssigkeiten muss sich an der Hand der im Vorstehenden gegebenen Formeln für die Knoten- und Bauchstärken der Brücke B_2 ausführen lassen, falls ähnliche Formeln auch für einen, anomal sich verhaltenden Körper aufgestellt werden. Die Absorptionsindices ergeben sich dann durch eine Berechnung, die allerdings zu umgehen gewesen wäre, wenn man eine directere Methode zur Bestimmung des Absorptionsindex der Flüssigkeit eingeschlagen hätte. Ich glaube aber kaum, dass für kurze elektrische Wellen sich eine bequemere und ebenso scharfe Beobachtungsmethode darbieten wird, als die hier genannte, da die Grösse der elektrischen Kraft sich sehr gut durch ihre Wirkung auf eine Zehnder'sche oder andere Vacuumröhre äussert, jedoch nur dann, wenn man sie an einer von Luft umgebenen Stelle der Drähte kennen lernen will. Eine im Wasser z. B. über die Drähte gelegte Vacuumröhre spricht erstens viel schlechter an, als eine in Luft übergelegte, und zweitens würde ihr Vorhandensein die Grösse und Phase der elektrischen Wellen sehr stark beeinflussen, während dies bei Luftumgebung nicht der Fall ist. — Da die Hauptsache eine brauchbare und bequeme Beobachtungsmethode ist, so bietet es für ihre Anwendung wohl kein ernstliches Hinderniss, dass die exacte Berechnung der Resultate nicht die allereinfachste ist.

Wir können nun unsere bisherigen Resultate über die Knoten- und Bauchstärken einer Brücke B_2, falls sie in einer normal sich verhaltenden Flüssigkeit liegt, direct auf unseren Fall hier übertragen, bei dem es sich um Flüssigkeiten handelt mit Dispersion (d. h. n abhängig von T) und anomaler Absorption (d. h. $\varkappa$ grösser, als der Leitfähigkeit σ entsprechend), weil die Reflexions- und Uebergangsfactoren der Wellen sowohl an der Flüssigkeitsgrenze, als an der

Brücke B_2, schliesslich sämmtlich in der Form geschrieben sind, dass sie nicht mehr die Constanten ε und σ, sondern nur n und $\varkappa$ enthalten. Alle Formeln, die nicht mehr ε und σ enthalten, gelten in unserem Falle genau ebenso, mit derselben Bedeutung der Buchstaben.

Diese Behauptung bedarf der Beweises. Wir wollen die Betrachtung an die MAXWELL'schen Gleichungen des elektromagnetischen Feldes der Umgebung der Drähte anknüpfen. Die z-Axe sei den Drähten parallel gelegt, die x-Axe in die die Drähte verbindende Ebene, die y-Axe senkrecht zu ihr. Die Componenten der elektrischen Kraft in der Umgebung der Drähte mögen genannt sein X, Y, Z, die der magnetischen Kraft $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$. Von dem galvanischen Widerstand der Drähte wollen wir absehen. Sein Einfluss würde sich genau so äussern, wie bei den bisherigen Betrachtungen, er ist hier aber thatsächlich ganz zu vernachlässigen, denn die Kleinheit der oben mit τ bezeichneten Grösse ($\tau = 0{,}00285$) bedingt in den Formeln keinen Unterschied, wenn man die Flüssigkeitsgrenze und die Brücke B_2 nur wenig Wellenlängen von B_1 entfernt annimmt. — Wenn vom galvanischen Widerstand der Drähte abgesehen wird, ist $Z = \mathfrak{N} = 0$ zu setzen[1]).

Die MAXWELL'schen Gleichungen des elektromagnetischen Feldes der Umgebung der Drähte lauten dann:

$$(190)\qquad 4\pi u = -\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial z}, \quad 4\pi v = +\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial z}, \quad 0 = \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial y},$$

$$(191)\qquad \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = -\frac{\partial X}{\partial z}, \quad 0 = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}.$$

u, v bedeuten die x-, bezw. y-Componenten der Stromdichte, gemessen nach elektromagnetischem Maasse. Die z-Componente w verschwindet, weil $Z = 0$ ist.

Die Gleichungen (190), (191) sind allgemein gültig, für jeden Körper. Nur der Zusammenhang der Stromcomponenten mit den Componenten der elektrischen Kraft ist je nach Art des Körpers verschieden. Für einen Isolator der Dielektricitätsconstanten ε ist

$$(192)\qquad 4\pi u = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial X}{\partial t}.$$

1) Vgl. »Physik des Äthers« vom Verf. p. 449, 409.

Besitzt der Körper auch ein Leitvermögen σ, so ist

$$4\pi u = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial X}{\partial t} + 4\pi\sigma c X. \tag{193}$$

Besitzt der Körper schliesslich Moleküle mit Eigenschwingungen, so ist

$$u = u_0 + \Sigma u_h, \tag{194}$$

wobei u_0 der Gleichung (193) gehorcht, nämlich:

$$4\pi u_0 = \frac{\varepsilon_0}{c}\frac{\partial X}{\partial t} + 4\pi\sigma c X,$$

während für jedes u_h eine Differentialgleichung der Form:

$$u_h + a_h\frac{\partial u_h}{\partial t} + b_h\frac{\partial^2 u_h}{\partial t^2} = \frac{\varepsilon_h}{4\pi c}\frac{\partial X}{\partial t} \tag{195}$$

besteht[1]).

Handelt es sich um eine gedämpfte harmonische Schwingung hinsichtlich t, so ist

$$\frac{\partial u_h}{\partial t} = \frac{\alpha}{T}u_h, \quad \frac{\partial^2 u_h}{\partial t^2} = \left(\frac{\alpha}{T}\right)^2 u_h,$$

wobei $\alpha = \gamma + i2\pi$ ist, γ die zeitliche Dämpfung, T die Periode der Schwingung bedeutet. Daher wird (195) zu:

$$u_h\left(1 + a_h\frac{\alpha}{T} + b_h\left(\frac{\alpha}{T}\right)^2\right) = \frac{\varepsilon_h}{4\pi c}\frac{\partial X}{\partial t},$$

und (194) zu:

$$u = \frac{1}{4\pi c}\frac{\partial X}{\partial t}\left\{4\pi\sigma c^2\frac{T}{\alpha} + \varepsilon_0 + \sum\frac{\varepsilon_h}{1 + a_h\frac{\alpha}{T} + b_h\left(\frac{\alpha}{T}\right)^2}\right\}. \tag{196}$$

Wir können diese Gleichung schreiben als

$$4\pi u = \frac{\varepsilon(T)}{c}\cdot\frac{\partial X}{\partial t}, \tag{197}$$

worin $\varepsilon(T)$ eine Abkürzung für die in (196) auftretende Klammergrösse ist, die von T abhängt.

Setzt man diesen Werth in (190) ein, so erhält man durch Combination mit der zweiten der Gleichungen (191) für X (oder $\mathfrak{M}$) die Differentialgleichung:

1) Vergl. des Verf. »Physik des Äthers« pag. 522. Ein derartiger Ansatz ist allen Theorien der anomalen Dispersion gemeinsam.

(198) $$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\varepsilon(T)} \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial z^2}.$$

Integrirt man daher diese Gleichung durch

$$X = A_1 e^{\alpha \frac{t}{T} - \alpha'' \frac{z}{\lambda'}} + A_2 \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} - \alpha'' \frac{z}{\lambda'}},$$

so muss sein:

(199) $$\left(\frac{\alpha}{T}\right)^2 = \frac{c^2}{\varepsilon(T)} \left(\frac{\alpha''}{\lambda'}\right)^2.$$

Es soll nun zunächst der Reflexions- und Uebergangsfactor an der Grenze Luft-Flüssigkeit berechnet werden. Die Grenzbedingungen sind: Stetigkeit der X, Y, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$.

In Luft sei die einfallende Welle der x-Componente der elektrischen Kraft:

$$X_e = e^{\alpha\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda}\right)}$$

Die reflectirte Welle sei:

$$X_r = r \cdot e^{\alpha\left(\frac{t}{T} + \frac{z}{\lambda}\right)}.$$

Die über die Grenze gehende Welle sei

$$X_\delta = \delta \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} - \alpha'' \frac{z}{\lambda'}}.$$

Wegen der zweiten der Gleichungen (191) sind die y-Componenten der magnetischen Kraft zu schreiben:

Einfallende Welle: $\mathfrak{M}_e = \frac{cT}{\lambda} \cdot e^{\alpha\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda}\right)}$,

Reflectirte Welle: $\mathfrak{M}_r = -r \cdot \frac{cT}{\lambda} \cdot e^{\alpha\left(\frac{t}{T} + \frac{z}{\lambda}\right)}$,

Übergehende Welle: $\mathfrak{M}_\delta = \delta \cdot \frac{cT}{\lambda'} \frac{\alpha''}{\alpha} \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} - \alpha'' \frac{z}{\lambda'}}$.

Nun ist $cT = \lambda$; daher, wenn die Grenze bei $z = \beta\lambda$ liegt, werden die Grenzbedingungen zu:

(200) $$\begin{aligned} X_e + X_r = X_\delta&: \quad e^{-\alpha\beta} + r \cdot e^{+\alpha\beta} = \delta \cdot e^{-\alpha''\beta\frac{\lambda}{\lambda'}}, \\ \mathfrak{M}_e + \mathfrak{M}_r = \mathfrak{M}_\delta&: \quad e^{-\alpha\beta} - r \cdot e^{+\alpha\beta} = \delta \frac{\alpha''}{\alpha} \frac{\lambda}{\lambda'} \, e^{-\alpha''\beta\frac{\lambda}{\lambda'}}. \end{aligned}$$

Dies sind dieselben Gleichungen, aus denen oben pag. 119, Gleichungen (126), der Reflexionsfactor r und Uebergangsfactor (er ist

dort, wenn man ihn nicht auf die Ladung e, sondern die elektrische Kraft bezieht, $\delta : \varepsilon$ genannt) bestimmt sind.

Es bleibt also nur noch übrig zu zeigen, dass auch für die Reflexion an einer Brücke B_2 in der Flüssigkeit vollständig unsere frühere Formel (118) (pag. 114) hier gültig bleibt.

Wendet man die erste oder die zweite der Gleichungen (191) auf die unmittelbar am Drahte anliegende Umgebung an, so kann man diese Gleichungen für die Oberfläche des Drahtes selbst in der Weise interpretiren, dass die elektromotorische Kraft der Selbstinduction gerade compensirt wird durch die nach der z-Axe wirkende elektromotorische Kraft, welche in der Drahtoberfläche durch die austretenden elektrischen Kraftlinien erzeugt wird.

Wenden wir diesen Ansatz auch auf eine Brücke B_2 an, so müssen wir schreiben:

$$\frac{l}{c}\frac{\partial \mathfrak{M}''}{\partial t} = 2X, \tag{201}$$

wobei l die Länge der Brücke B_2 bedeutet, $\mathfrak{M}''$ die von dem Brückenstrom i'' in der Umgebung von B_2 hervorgebrachte Anzahl magnetischer Kraftlinien pro Längeneinheit der Brücke B_2, X den Werth der elektrischen Kraft an dem einen Ende der Brücke, d. h. auf dem einen der Paralleldrähte. Da die elektrische Kraft auf dem anderen Paralleldrahte im gegenüberliegenden Punkte gleich gross, aber von entgegengesetztem Vorzeichen ist, so ist $2X$ die totale Abnahme der elektrischen Kraft bei Durchschreitung der ganzen Brückenlänge l. Diese elektrische Kraft X muss sich an den Paralleldrähten stetig über die Brücke B_2 hinüber fortsetzen. Bezeichnen wir daher die elektrische Kraft vor B_2 mit X, hinter B_2 mit X', so muss sein:

$$X = X' \text{ für } z = \beta'\lambda' \text{ (an der Brücke)}. \tag{202}$$

Diese Gleichung entspricht durchaus der früher abgeleiteten Brückenbedingung (15).

Dagegen setzt sich die magnetische Kraft $\mathfrak{M}$ nicht stetig über die Brücke hinüber fort, denn $\mathfrak{M}$ ist proportional mit dem im Drahte fliessenden Strome, und dieser erleidet durch den Brückenstrom i'' eine Einbusse. Es wäre offenbar $\mathfrak{M}'' = \mathfrak{M} - \mathfrak{M}'$, falls die Selbstinduction der Längeneinheit der Brücke dieselbe wäre, wie die der Drähte. Ist aber erstere ζ' mal grösser, so ist

(203) $$\mathfrak{M}'' = \zeta'(\mathfrak{M} - \mathfrak{M}') \text{ bei } z = \beta'\lambda'.$$

Diese Gleichung ersetzt die oben pag. 112 als Gleichung (14) ausgesprochene Brückenbedingung, während (201) die frühere Gleichung (13′) ersetzt, und die zweite der Gleichungen (119), nämlich:

(204) $$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = -\frac{\partial X}{\partial z}$$

ersetzt die frühere Gleichung (5″) der pag. 107.

Die Formeln (201) bis (204) müssen die Reflexion an der Brücke vollkommen zu berechnen erlauben. Wir setzen:

$$X = e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha''\frac{z}{\lambda'}} + r \cdot e^{\alpha\frac{t}{T} + \alpha''\frac{z}{\lambda'}},$$

$$X' = \delta \cdot e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha''\frac{z}{\lambda'}},$$

$$\mathfrak{M} = \frac{cT}{\lambda'}\frac{\alpha''}{\alpha}\left(e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha''\frac{z}{\lambda'}} - r \cdot e^{\alpha\frac{t}{T} + \alpha''\frac{z}{\lambda'}}\right),$$

$$\mathfrak{M}' = \frac{cT}{\lambda'}\frac{\alpha''}{\alpha}\,\delta \cdot e^{\alpha\frac{t}{T} - \alpha''\frac{z}{\lambda'}},$$

so wird (202) zu:

$$e^{-\alpha''\beta'} + r \cdot e^{+\alpha''\beta'} = \delta \cdot e^{-\alpha''\beta'};$$

(203) liefert:

$$\mathfrak{M}'' = \zeta'\frac{cT}{\lambda'}\frac{\alpha''}{\alpha}\left(e^{-\alpha''\beta'} - r \cdot e^{+\alpha''\beta'} - \delta \cdot e^{-\alpha''\beta'}\right) \cdot e^{\alpha\frac{t}{T}},$$

d. h. mit Benutzung der vorigen Gleichung:

$$\mathfrak{M}'' = -\zeta'\frac{cT}{\lambda'}\frac{\alpha''}{\alpha} \cdot 2r \cdot e^{\alpha''\beta'} \cdot e^{\alpha\frac{t}{T}}.$$

Daher ist nach (201):

$$-\frac{l}{\lambda'}\zeta'\alpha'' r \cdot e^{\alpha''\beta'} = e^{-\alpha''\beta'} + r \cdot e^{+\alpha''\beta'},$$

oder

(205) $$r = -\frac{e^{-2\alpha''\beta'}}{1 + \alpha''\zeta'\frac{l}{\lambda'}}.$$

Dies ist aber dieselbe Gleichung für den Reflexionsfactor an der Brücke B_2, wie sie oben pag. 114 in der Formel (118) abgeleitet worden ist. Die obige Behauptung erscheint daher gerechtfertigt, dass man die Formeln des vorigen Abschnittes A. auch hier völlig benutzen darf.

Für den Fall ausserordentlich kleiner zeitlicher Dämpfung γ lässt sich nun leicht ein Näherungswerth des Absorptionsindex einer Substanz angeben, wenn der der scheinbar isoabsorbirenden Substanz bekannt ist. Setzen wir nämlich $\gamma = 0$, so wäre die Grösse g der Formeln (173) bis (176) gleich 1, während f kleiner als 1 ist. Die Maxima der Amplituden würden daher nach unendlich langer Zeit erreicht werden, d. h. für $h = \infty$. Diese Maxima würden nach allen jenen vier Formeln daher den Werth annehmen:

$$K, B = \frac{a'}{1-f}\left\{1 + r''\frac{a}{a'}\frac{f}{1-f}\right\}. \tag{206}$$

Da nun die Reflexion an der Brücke B_1, welche in Luft liegt, nahezu eine totale ist, so ist nach den Formeln (171) nahezu:

$$f = \mathfrak{r},\ a = 2,\ a' = 1 + \mathfrak{r}.$$

Daher wird (206) zu:

$$K, B = \frac{1+\mathfrak{r}}{1-\mathfrak{r}}\left\{1 + r''\frac{2\mathfrak{r}}{1-\mathfrak{r}^2}\right\}. \tag{207}$$

Nun ist nach (188), (189) für $\gamma = 0$, $\tau = 0$:

$$r'' = \pm\, 4\varrho'\mathfrak{r}' e^{-2\pi\varkappa(k + \Delta'(-\frac{1}{2}))},$$

wobei das + Zeichen für eine Knotenlage des B_2, das — Zeichen für eine Bauchlage gilt, und wobei k die Ordnungszahl des Knotens oder Bauches bedeutet.

Ferner ist nach den Formeln (129) für $\mathfrak{r}^2$ und (160) für $\mathfrak{r}'^2$:

$$\frac{\mathfrak{r}\mathfrak{r}'}{1-\mathfrak{r}^2} = \frac{\sqrt{1+\varkappa^2}}{4}. \tag{208}$$

Daher wird (207) zu:

$$K, B = \frac{1+\mathfrak{r}}{1-\mathfrak{r}}\left\{1 \pm 2\varrho'\sqrt{1+\varkappa^2}\, e^{-2\pi\varkappa(k + \Delta'(-\frac{1}{2}))}\right\}. \tag{209}$$

Für scheinbar isoabsorbirende Substanzen muss das zu 1 additiv oder subtractiv hinzutretende Glied bei gleichem Betrage der Ordnungszahl k denselben Werth haben. Wenn man nun den Reflexionsfactor ϱ' an der Brücke B_2 für beide Substanzen als gleich annimmt, was näherungsweise wenigstens gestattet ist, so erkennt man, dass die Gleichheit jenes Zusatzgliedes eintritt, wenn $\varkappa$ für beide Substanzen denselben Werth hat, denn auf Δ' kommt es in Anbetracht seiner

Kleinheit ($\Delta' < 0,1$) nicht sehr an und ausserdem ist es auch im Wesentlichen nur von $\varkappa$ allein abhängig.

Bei sehr kleiner zeitlicher Dämpfung sind daher näherungsweise die Absorptionsindices scheinbar isoabsorbirender Substanzen einander gleich, auch wenn ihre Brechungsexponenten verschieden sind.

Da ϱ' für die Substanz mit stärkerem Brechungsexponenten nach den früheren Entwickelungen kleiner ist, als für die Substanz mit kleinerem Brechungsexponenten, so ist der Näherungswerth des $\varkappa$ in der Weise zu corrigiren, dass der Absorptionsindex der letzteren Substanz etwas grösser ist, als der der ersteren, d. h. die Correction findet in dem schon oben pag. 154 genannten Sinne statt. Es ist aber bemerkenswerth, dass diese Correction nach der Formel (209) nur wegen des Auftretens des Factors ϱ' nöthig ist, d. h. wegen der verschieden starken Brückenreflexion in beiden Substanzen; dass dagegen die verschieden starke Reflexion an der Grenze beider Substanzen, d. h. die Verschiedenheit des $\mathfrak{r}$, bei der zeitlichen Dämpfung $\gamma = 0$ völlig aus dem Resultat verschwindet. Dies ist ein Fingerzeig dafür, dass auch bei grösserer zeitlicher Dämpfung γ man nicht ohne speciellere Berechnung wird sagen können, in welchem Sinne Verschiedenheit des Reflexionsvermögens $\mathfrak{r}$ bei beiden Substanzen wirkt.

Auch bei grösserer zeitlicher Dämpfung γ wird man als ersten Näherungswerth Gleichheit der Absorptionsindices zweier scheinbar isoabsorbirender Substanzen benutzen können. Ist nun der Absorptionsindex der einen Substanz bekannt, z. B. als theoretischer Werth für eine wässrige Lösung, die sich normal verhält, und berechnet man mit Benutzung dieses Absorptionsindex und der beobachteten Brechungsexponenten für beide Flüssigkeiten die Stärke des letzten mit einer Brücke B_2 gerade noch einstellbaren oder gerade nicht mehr einstellbaren Knotens oder Bauches nach den Formeln (184) bis (189), wobei der Werth der zeitlichen Dämpfung γ ungefähr bekannt sein muss, so erhält man einen zweiten Näherungswerth des unbekannten Absorptionsindex $\varkappa'$ der einen Flüssigkeit, wenn man über den Factor $e^{-2\pi\varkappa'}$ in der Weise verfügt, dass nun der procentische Einfluss des Vorhandenseins der Brücke auf die Grösse der elektrischen Kraft in beiden scheinbar isoabsorbirenden Flüssig-

keiten derselbe ist. — Dieses Verfahren kann man wiederholen, um einen dritten Näherungswerth für $\varkappa$ zu bilden; es ist dies aber meist nicht nöthig, da die in den Formeln (184) bis (189) auftretenden Grössen, abgesehen von dem in r'' vorkommenden Factor $e^{-2\pi\varkappa k}$, sehr wenig sich mit $\varkappa$ ändern.

Auf diesem Wege soll jetzt die Berechnung der Absorptionsindices einer Anzahl von Flüssigkeiten mit anomaler Absorption vorgenommen werden, für welche ich früher[1]) die scheinbar isoabsorbirenden wässrigen Lösungen von Kupfersulfat ermittelt habe. Die Temperatur ist 17°.

Glycerin.

1) $\lambda = 75$ cm, d. h. $T = 75 : 3.10^{10}$ sec.

$n = 5{,}0$. Es ist gerade noch der 1. Knoten einstellbar. Scheinbar isoabsorbirend mit einer wässrigen $CuSO_4$-Lösung der Leitfähigkeit $K = 170 . 10^{-8}$. Nach der oben pag. 149 angegebenen Tabelle ist daher der erste Näherungswerth des Absorptionsindex:

$$\varkappa = 0{,}42 .$$

Mit Benutzung dieses Werthes und $\gamma = 0{,}15$ wird nun

$$\mathfrak{r} = 0{,}71 ; \quad \mathfrak{r}' = 0{,}189 ;$$

$$f = 0{,}70 ; \quad g = 1{,}16 ; \quad fg = c = 0{,}823 ; \quad \varrho' = 0{,}845 .$$

$$a = 1{,}94 ; \quad a' = 1{,}76 ; \quad a''_1 = 0{,}379 ; \quad a''_2 = 0{,}417 .$$

$$h_1 + 1 = 4{,}98 ; \quad h_2 + 1 = 4{,}50 .$$

$$K_1^{\mathrm{I}} = 3{,}14\left(1 + 0{,}805 \cdot e^{-2\pi\varkappa'}\right),$$

$$K_1^{\mathrm{II}} = 3{,}08\left(1 + 0{,}793 \cdot e^{-2\pi\varkappa'}\right).$$

Da nun nach der Tabelle der pag. 150 für die isoabsorbirende wässrige Lösung $(K = 170 . 10^{-8})$ der procentische Einfluss der Brücke B_2 in der ersten Knotenlage im Zeitintervall I 3,1 %, im Intervall II 2,9 % beträgt, d. h. im Mittel 3,0 %, während er hier im Mittel $80 . e^{-2\pi\varkappa'}$ % beträgt, so muss sein:

$$0{,}030 = 0{,}80 \cdot e^{-2\pi\varkappa'} ,$$

woraus als zweiter Näherungswerth folgt

$$\varkappa' = 0{,}52 .$$

1) »Arbeit I«.

Berechnet man nun die Hilfsgrössen mit diesem $\varkappa'$, so erhält man:

$$\mathfrak{r} = 0{,}730\,; \quad \mathfrak{r}' = 0{,}180\,.$$

$$f = 0{,}72\,; \quad g = 1{,}16\,; \quad fg = c = 0{,}835\,; \quad \varrho' = 0{,}842\,.$$

$$a = 1{,}94\,; \quad a' = 1{,}78\,; \quad a_1'' = 0{,}413\,; \quad a_2'' = 0{,}451\,.$$

$$h_1 + 1 = 4{,}90\,; \quad h_2 + 1 = 4{,}42\,.$$

$$K_1^{\mathrm{I}} = 3{,}31\left(1 + 0{,}684 \cdot e^{-2\pi\varkappa'}\right),$$

$$K_1^{\mathrm{II}} = 3{,}31\left(1 + 0{,}682 \cdot e^{-2\pi\varkappa'}\right);$$

aus $0{,}030 = 0{,}683 \,.\, e^{-2\pi\varkappa'}$ folgt der dritte Näherungswerth

$$\varkappa' = 0{,}50\,.$$

Dieser unterscheidet sich in der That nur unbedeutend vom zweiten Näherungswerth. — Die Genauigkeit, mit der $\varkappa'$ auf diese Weise bestimmt ist, ist ziemlich erheblich. Denn die Beobachtung ergab, dass eine Lösung der Leitfähigkeit $K = 180 \,.\, 10^{-8}$ schon eine bemerkbar stärkere Absorption besass. Nach der Tabelle der pag. 150 ist aber für diese Lösung der Einfluss des ersten Knotens nur um sehr wenig kleiner, als bei der Lösung, deren $K = 170 \,.\, 10^{-8}$ beträgt. $\varkappa'$ würde daher nur um 1 % grösser ausfallen, wenn die Lösung $K = 180 \,.\, 10^{-8}$ als scheinbar isoabsorbirend angesehen wäre. Selbst in Anbetracht der Unsicherheit der theoretischen Grundlagen, welche besonders in Berechnung der Reflexionsschwächung ϱ' an der Brücke B_2 liegt, erscheint, weil $e^{-2\pi\varkappa'}$ sich mit Aenderung des $\varkappa'$ sehr stark ändert, die Bestimmung des Absorptionsindex $\varkappa'$ auf etwa 2 % nach dieser Methode erreicht.

2) $\lambda = 211$ cm, d. h. $T = 211 : 3 \,.\, 10^{10}$ sec.

$n = 6{,}25$. Der erste Knoten ist noch gut einstellbar, der zweite Bauch wurde wegen der Kürze des Troges, welcher das Glycerin enthielt, nicht eingestellt. Scheinbar isoabsorbirend mit einer wässrigen $CuSO_4$-Lösung der Leitfähigkeit $K = 34 \,.\, 10^{-8}$.

Zunächst ist bei diesen grösseren Schwingungsdauern T[1]) (die Tabelle der pag. 149 bezieht sich nur auf $\lambda = 75$ cm) für die wässrige Lösung:

1) Da T grösser ist, so ist auch τ nach Formel (70) etwas grösser, als bei den vorigen Versuchen, nämlich: $\tau = 0{,}005$. Die zeitliche Dämpfung ist bei diesem grösseren Erreger nicht direct bestimmt worden. Es ist ebenfalls der Werth $\gamma = 0{,}15$ der Rechnung zu Grunde gelegt. Der Einfluss von γ auf das Resultat ist gering.

$$s = 0,282 \,; \quad n = 9,66 \,; \quad \varkappa = 0,262 \,.$$

$$\mathfrak{r} = 0,823 \,; \quad \mathfrak{r}' = 0,1015 \,.$$

$$f = 0,817 \,, \quad g = 1,16 \,; \quad fg = c = 0,948 \,; \quad \varrho' = 0,895 \,.$$

$$a = 1,93 \,; \quad a' = 1,89 \,; \quad a_1'' = 0,717 \,; \quad a_2'' = 0,735 \,.$$

$$h_1 + 1 = 6,23 \,; \quad h_2 + 1 = 5,76 \,.$$

$$K_1^{\mathrm{I}} = 5,00\,(1 + 0,155)\,,$$

$$K_1^{\mathrm{II}} = 4,93\,(1 + 0,169)\,,$$

$$B_2^{\mathrm{I}} = 5,00\,(1 - 0,060)\,,$$

$$B_2^{\mathrm{II}} = 4,93\,(1 - 0,063)\,.$$

Führt man nun dieselbe Berechnung für Glycerin durch, wobei man als Näherungswerth von $\varkappa$ den Betrag 0,30 annimmt (er ist etwas grösser gewählt, als der der Lösung, weil dadurch im Allgemeinen der zweite Näherungswerth $\varkappa'$ näher am ersten liegen wird), so erhält man für Glycerin:

$$\mathfrak{r} = 0,745 \,; \quad \mathfrak{r}' = 0,157 \,.$$

$$f = 0,740 \,; \quad g = 1,16 \,; \quad fg = c = 0,859 \,; \quad \varrho' = 0,950 \,.$$

$$a = 1,93 \,; \quad a' = 1,80 \,; \quad a_1'' = 0,458 \,; \quad a_2'' = 0,492 \,.$$

$$h_1 + 1 = 5,14 \,; \quad h_2 + 1 = 4,67 \,.$$

Für die 1. Knotenlage der Brücke B_2 würde folgen:

$$K_1^{\mathrm{I}} = 3,50\,(1 + 0,840 \cdot e^{-2\pi\varkappa'})\,,$$

$$K_1^{\mathrm{II}} = 3,50\,(1 + 0,847 \cdot e^{-2\pi\varkappa'})\,;$$

für die 2. Bauchlage der Brücke B_2:

$$B_2^{\mathrm{I}} = 3,50\,(1 - 0,689 \cdot e^{-2\pi\varkappa' \cdot 1,5})\,,$$

$$B_2^{\mathrm{II}} = 3,50\,(1 - 0,711 \cdot e^{-2\pi\varkappa' \cdot 1,5})\,.$$

Berechnet man $\varkappa'$ aus der Vergleichung mit der wässrigen Lösung bei der Knotenlage, so entsteht als zweiter Näherungswerth:

$$0,8435 \cdot e^{-2\pi\varkappa'} = 0,162 \,, \quad \varkappa' = 0,263 \,.$$

Aus der Vergleichung der Bauchlage folgt:

$$0,700 \cdot e^{-2\pi\varkappa \cdot 1,5 \cdot \varkappa'} = 0,0615 \,, \quad \varkappa' = 0,258 \,.$$

Als Mittel ergiebt sich daher

$$\varkappa' = 0,26 \,.$$

Dies würde also genau zusammenfallen mit dem Absorptionsindex der wässrigen Lösung. Da aber der erste Näherungswerth hier bei

der Rechnung zu gross gewählt wurde, so fällt der dritte Näherungswerth von $\varkappa'$ etwas grösser als der zweite aus, und es ergiebt sich

$$\varkappa' = 0{,}27 .$$

Bei der grossen Schwingungsdauer ist daher der Absorptionsindex des Glycerins nur etwa halb so gross, als bei der dreimal schnelleren Schwingung. Die Absorption ist also sehr abhängig von der Schwingungsdauer, und geht den umgekehrten Gang, wie sie bei normal sich verhaltenden, leitenden Flüssigkeiten thut. Denn während letztere eine langsame Schwingung viel stärker absorbiren als eine schnelle, ist es beim Glycerin umgekehrt.

Bei den folgenden Substanzen ist die Absorption nur für die schnellen Schwingungen der Wellenlänge $\lambda = 75$ cm bestimmt worden.

Amylalkohol.

$\lambda = 75$ cm. $n = 2{,}34$. Es ist gerade noch der erste Knoten einstellbar; scheinbar isoabsorbirend mit einer wässrigen $CuSO_4$-Lösung der Leitfähigkeit $K = 180 \,.\, 10^{-8}$. Nach der oben pag. 149 gegebenen Tabelle ist deren Absorptionsindex 0,435. Legt man den Näherungswerth $\varkappa = 0{,}52$ den Formeln zu Grunde, so folgt für Amylalkohol:

$$\mathfrak{r} = 0{,}510 \,; \quad \mathfrak{r}' = 0{,}410 \,.$$

$$f = 0{,}504 \,; \quad g = 1{,}16 \,; \quad fg = c = 0{,}585 \,; \quad \varrho' = 0{,}940 \,.$$

$$a = 1{,}94 \,; \quad a' = 1{,}55 \,; \quad a_1'' = 0{,}173 \,; \quad a_2'' = 0{,}216 \,.$$

$$h_1 + 1 = 3{,}27 \,; \quad h_2 + 1 = 2{,}86 \,.$$

$$K_1^{\mathrm{I}} = 2{,}92\left(1 + 0{,}678 \cdot e^{-2\pi\varkappa'}\right),$$

$$K_1^{\mathrm{II}} = 2{,}73\left(1 + 0{,}709 \cdot e^{-2\pi\varkappa'}\right).$$

Nach der Tabelle der pag. 150 ist für die Lösung $K = 180 \,.\, 10^{-8}$ als Mittel der Zeitintervalle I und II:

$$K_1 = 4{,}62\,(1 + 0{,}029) \,.$$

Daher bestimmt sich $\varkappa'$ aus:

$$0{,}693 \cdot e^{-2\pi\varkappa'} = 0{,}029 \,,$$

$$\varkappa' = 0{,}51 \,.$$

Dieser zweite Näherungswerth liegt so nahe am ersten, dass es nicht mehr nothwendig ist, einen dritten Näherungswerth zu bestimmen.

Aethylalkohol.

$\lambda = 75$ cm. $n = 4,80$. Der zweite Knoten ist fast noch einstellbar; scheinbar isoabsorbirend mit wässriger Lösung von $K = 75 \,.\, 10^{-8}$. Nach der oben pag. 149 angegebenen Tabelle ist deren Absorptionsindex $\varkappa = 0,212$. Legt man den Näherungswerth $\varkappa = 0,25$ für Aethylalkohol zu Grunde, so folgt:

$$\mathfrak{r} = 0,670\,; \quad \mathfrak{r}' = 0,211\,.$$
$$f = 0,662\,; \quad g = 1,16\,; \quad fg = e = 0,767\,; \quad \varrho' = 0,851\,.$$
$$a = 1,94\,; \quad a' = 1,72\,; \quad a_1'' = 0,319\,; \quad a_2'' = 0,360\,.$$
$$h_1 + 1 = 4,30\,; \quad h_2 + 1 = 3,84\,.$$
$$K_2^{\mathrm{I}} = 2,91\left(1 + 0,422 \cdot e^{-4\pi\varkappa'}\right),$$
$$K_2^{\mathrm{II}} = 2,91\left(1 + 0,458 \cdot e^{-4\pi\varkappa'}\right).$$

Nach der Tabelle der pag. 150 ist für die Lösung $K = 75 \,.\, 10^{-8}$ als Mittel der Zeitintervalle I und II:

$$K_2 = 4,23(1 + 0,0315)\,.$$

Daher bestimmt sich $\varkappa'$ aus:

$$0,440 \cdot e^{-4\pi\varkappa'} = 0,0315\,,$$
$$\varkappa' = 0,21\,.$$

Essigsäure.

$\lambda = 75$ cm. $n = 2,51$. Der zweite Bauch ist einstellbar, der zweite Knoten nicht. Isoabsorbirend mit wässriger $CuSO_4$-Lösung der Leitfähigkeit $K = 80 \,.\, 10^{-8}$. Nach der oben pag. 149 angegebenen Tabelle ist deren Absorptionsindex $\varkappa = 0,224$. Legt man den Näherungswerth $\varkappa = 0,23$ für Essigsäure zu Grunde, so folgt:

$$\mathfrak{r} = 0,454\,; \quad \mathfrak{r}' = 0,450\,.$$
$$f = 0,449\,; \quad g = 1,16\,; \quad fg = e = 0,520\,; \quad \varrho' = 0,940\,.$$
$$a = 1,94\,; \quad a' = 1,49\,; \quad a_1'' = 0,142\,; \quad a_2'' = 0,185\,.$$
$$h_1 + 1 = 2,98\,; \quad h_2 + 1 = 2,58\,.$$
$$B_1^{\mathrm{I}} = 1,88\left(1 - 0,539 \cdot e^{-3\pi\varkappa'}\right),$$
$$B_2^{\mathrm{II}} = 1,87\left(1 - 0,430 \cdot e^{-3\pi\varkappa'}\right).$$

Nach der Tabelle der pag. 150 ist für die Lösung $K = 80 \,.\, 10^{-8}$ als Mittel der Zeitintervalle I und II:

$$B_2 = 4,27(1 - 0,0575)\,.$$

Daher bestimmt sich $\varkappa'$ aus:

$$0{,}485 \cdot e^{-3\pi\varkappa'} = 0{,}0575\,,$$
$$\varkappa' = 0{,}226\,.$$

Zusammenfassung der Hauptresultate.

1) Bei der Reflexion elektrischer Drahtwellen an einer Brücke tritt eine Schwächung ihrer Amplitude und eine Phasenverschiebung ein, welche im Wesentlichen abhängt von dem Verhältniss der Länge der Brücke zu der Wellenlänge. Wird letztere sehr klein, wie z. B. in dem Falle, dass die Drähte von Wasser umgeben sind, so kann auch die Schwächung der Amplitude bei der Reflexion selbst für sehr kurze Brückenlängen ziemlich bedeutend werden. Je mehr die reflectirte Amplitude an Stärke abnimmt, desto mehr gewinnt die über die Brücke weitergehende Amplitude der elektrischen Kraft. Bei kurzen Wellenlängen, z. B. elektrischen Schwingungen in Wasser, ist die weitergehende Amplitude so bedeutend, dass unter Umständen die Anordnung des Drahtsystems hinter der reflectirenden Brücke merkbaren Einfluss gewinnt auf die elektrische Kraft vor der Brücke. Die für Berechnung dieser Verhältnisse aufgestellten Formeln enthalten ausser direct zu messenden Grössen entweder beobachtbare Grössen (die beobachtbare Brücken- oder Bügelverkürzung), oder solche Grössen, welche entweder genau zu berechnen, oder wenigstens zu taxiren sind. Zu letzteren gehört das Verhältniss ζ der Selbstinduction der Längeneinheit der Brücke zu der der Paralleldrähte. — Die Brückenverkürzung hängt direct mit der Phasenverschiebung der Wellen bei der Reflexion zusammen.

2) Der Leitungswiderstand der Drähte gewinnt bei den gewöhnlichen experimentellen Anordnungen merkbaren Einfluss auf die Erscheinungen nur dann, wenn die zwei Brücken, zwischen denen sich stehende elektrische Wellen ausbilden, um sehr zahlreiche Wellenlängen von einander entfernt sind.

3) Die zeitliche Dämpfungsconstante γ der elektrischen Schwingungen kann aus einer einfachen Beobachtung, nämlich der Anzahl beobachtbarer Knoten und Bäuche, gefunden werden, wenn die Empfindlichkeit des Wellenindicators bekannt ist. Letztere braucht aber nur taxirt zu werden, da geringe Aenderungen sich kaum

auf γ äussern. Für die von mir gewählte Versuchsanordnung ist nahezu $\gamma = 0,15$.

4) Für den Erreger der Wellen sind mehrere harmonische Oberschwingungen nachweisbar.

5) Die Empfindlichkeit des Wellenindicators kann an der Hand aufgestellter Formeln genau ermittelt werden, wenn man die in einer wässrigen Lösung eines Elektrolyten beobachtbaren Knoten und Bäuche zählt.

6) Wässrige Lösungen von Kupfersulfat und Kochsalz besitzen normale Absorption der elektrischen Wellen, d. h. eine derartige, wie sie theoretisch aus ihrer Leitfähigkeit und ihrer Dielektricitätsconstanten folgt.

7) Die Phasenänderung bei der Reflexion der elektrischen Wellen an der Grenze Luft — wässriger Elektrolyt ist nur wenig von π verschieden. Immerhin bewirkt diese geringe Differenz, dass die erste Bauchlage einer Brücke B_2 theoretisch nicht streng angebbar ist, wenn bei unveränderter Lage der Flüssigkeitsgrenze zu reinem Wasser mehr und mehr Salz zugesetzt wird. Daher kann man auch für wässrige Lösungen, in denen nur noch die erste Bauchlage einer Brücke B_2 einstellbar ist, nicht genau angeben, innerhalb welcher Genauigkeit ihre Dielektricitätsconstante mit der des reinen Wassers übereinstimmt.

8) Der Absorptionsindex $\varkappa$ einer beliebigen, auch anomal sich verhaltenden Flüssigkeit lässt sich durch einfache experimentelle Vergleichung mit einer scheinbar isoabsorbirenden wässrigen Lösung eines Elektrolyten ermitteln. Es ergeben sich für $\varkappa$ folgende Zahlen:

Glycerin: $\varkappa = 0,50$ bei $T = 25 . 10^{-10}$ sec.;
$\varkappa = 0,27$ bei $T = 70 . 10^{-10}$ sec.

Amylalkohol: $\varkappa = 0,51$ bei $T = 25 . 10^{-10}$.

Aethylalkohol: $\varkappa = 0,21$ bei $T = 25 . 10^{-10}$.

Essigsäure: $\varkappa = 0,23$ bei $T = 25 . 10^{-10}$.

Fig. 1. Wasserreflexion, zeitlicher Verlauf. $\gamma = 0{,}15$.

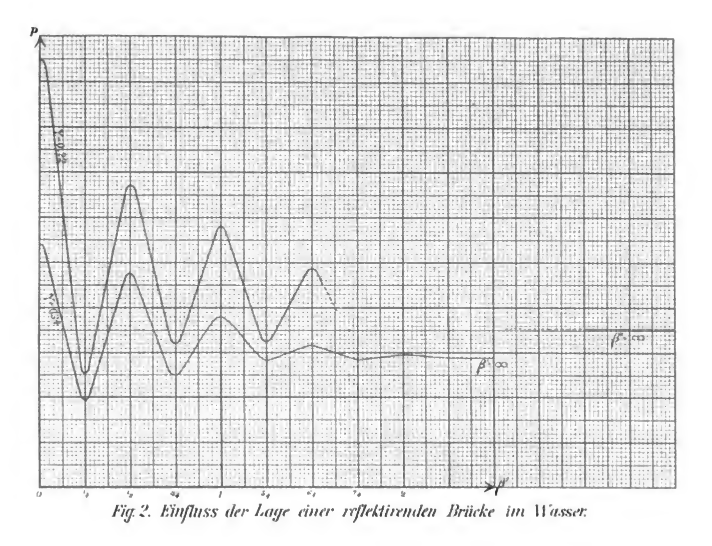


Fig. 2. Einfluss der Lage einer reflektirenden Brücke im Wasser.



